М. С. Агранович

Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей

Москва
Издательство МЦНМО
2013

УДК 517.95
ББК 22.161.6
А25

Агранович М. С.

А25 Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. — М.: МЦНМО, 2013. — 379 с.

ISBN 978-5-4439-0070-4

Эта книга адресуется математикам, которые занимаются уравнениями в частных производных и функциональным анализом.

Первые две главы содержат вводные курсы. В главе I это теория пространств H^s бесселевых потенциалов ($s \in \mathbb{R}$; при $s \geqslant 0$ это пространства W_2^s С. Л. Соболева—Л. Н. Слободецкого). В главе II — теория общих эллиптических уравнений и задач в этих пространствах с гладкими коэффициентами на гладких поверхностях и в областях с гладкой границей. Значительную часть книги составляет теория классических граничных задач для сильно эллиптических систем 2-го порядка с коэффициентами малой гладкости в ограниченных липшицевых областях. Вместе с вспомогательным материалом она изложена в главе III и продолжается в главе IV. В главе IV, имеющей характер обзора, результаты обобщаются на пространства H_p^s бесселевых потенциалов и B_p^s О. В. Бесова (в частности, на пространства W_p^s). Она начинается с очерка теории интерполяции.

Изложение рассчитано в первую очередь на начинающих математиков, которые специализируются по уравнениям в частных производных и функциональному анализу. Особое внимание уделено доступности изложения. Книга может быть интересна также специалистам в этих областях, так как содержит ряд результатов, полученных относительно недавно. Но она может быть полезна математикам и других направлений, включая специалистов по прикладной математике и геометров, а также физикам. Предполагается знакомство с основными математическими курсами, включая элементы функционального анализа.

ББК 22.161.6

ISBN 978-5-4439-0070-4

Содержание

Предисловие

Эта книга состоит из четырех глав.

Первые две главы содержат вводные курсы: в главе I излагается теория пространств H^s типа Соболева ($s \in \mathbb{R}$) в $\mathbb{R}^n$, на гладком замкнутом многообразии и в ограниченной области с гладкой границей, а в главе II — основы теории общих линейных эллиптических уравнений на таком многообразии и теории общих эллиптических граничных задач в такой области в этих пространствах.

В главе III излагается теория основных задач для сильно эллиптических систем 2-го порядка в тех же пространствах в ограниченной липшицевой области, т. е. в области с липшицевой (вообще говоря, негладкой) границей.

В главе IV, имеющей характер обзора, кратко рассматриваются более общие пространства H_p^s бесселевых потенциалов и $B_p^s = B_{p,p}^s$ О. В. Бесова, $1 < p < \infty$, и описываются их приложения к тем же задачам.

Пространства С. Л. Соболева W_p^s — это пространства H_p^s при целом $s \geqslant 0$. Пространства B_p^s совпадают с пространствами Л. Н. Слободецкого W_p^s при нецелом $s > 0$. При $p = 2$ пространства H_2^s и B_2^s совпадают с H^s.

В основе книги — лекции автора, прочитанные в Независимом московском университете в 2005/06 годах, но они существенно расширены и доработаны. Наш план по сравнению с намеченным в [2] изменился.

Как и [2], эта книга рассчитана прежде всего на начинающих математиков и доступна студентам-математикам, начиная с 4 курса (знакомым, в частности, с основными понятиями функционального анализа: мера Лебега, гильбертовы и банаховы пространства, компактный оператор и его спектр и т. п.).

Ссылки на материал обязательных университетских математических курсов как правило не приводятся.

В первую очередь эта книга может быть полезна студентам и аспирантам, которые специализируются по уравнениям в частных производных и функциональному анализу. Но она может заинтересовать и тех, кто специализируется в других областях математики, а также математиков-прикладников и физиков.

Опишем теперь материал книги немного подробнее.

В первой главе мы сразу рассматриваем пространства H^s (простейшие пространства бесселевых потенциалов) и отрицательного порядка, которые не являются пространствами Соболева—Слободецкого, но необходимы в главе III. Уже в случае полупространства $\mathbb{R}^n_+$, в §§ 3 и 4, некоторые утверждения требуют довольно деликатных доказательств. Построение универсального ограниченного оператора продолжения функций из области во все пространство, предложенное В. С. Рычковым [294], отложено до § 10, так как этот оператор строится для липшицевых областей.

Во второй главе мы переходим к общей теории эллиптических уравнений и эллиптических граничных задач. Ее построение проводится подробно в §§ 6 и 7 в минимизированной общности, но основные обобщения формулируются или, по крайней мере, называются и поясняются. Это «окно» в общую теорию линейных уравнений в частных производных. Не открыв такое окно, трудно оценить в должной мере красоту и возможности применения теории пространств типа Соболева и научиться пользоваться ее результатами. Добавим, что теория эллиптических уравнений и задач, построенная на основе теории пространств типа Соболева, в свою очередь, существенно влияла на последнюю, предоставляя ей, во-первых, актуальные вопросы, во-вторых, некоторые удобные результаты.

Вопрос о том, что относится к основам теории эллиптических уравнений, решается у нас, может быть, не вполне канонически. Существенными разделами этой теории мы считаем теорию уравнений, эллиптических с параметром, и «более классическую» теорию сильно эллиптических уравнений, в которых на первом плане — однозначно разрешимые (а не фредгольмовы) уравнения и задачи. Классические вариационные задачи Дирихле и Неймана для сильно эллиптических уравнений рассматриваются сначала в области с гладкой границей в § 8. На наш взгляд, сейчас сильно эллиптические уравнения — скорее содержательный раздел теории эллиптических уравнений, чем давно пройденный этап ее развития.

Третья глава начинается с § 9, в котором сначала обсуждается специфика липшицевых областей и поверхностей. В частности, мы показываем, что липшицева функция почти всюду дифференцируема, следуя статье В. В. Степанова [315], и что выпуклая функция липшицева. Затем объясняются основные факты теории пространств H^s в липшицевых областях и на липшицевых поверхностях. В § 10 мы, следуя работе [294], обсуждаем популярные в современной литературе дискретные нормы и дискретное представление функций (начальная информация о них изложена в п. 1.14) и строим универсальный оператор продолжения (только для пространств H^s, с некоторыми упрощениями по сравнению с [294]).

В § 11 и § 12 на фоне уже описанной теории общих эллиптических задач излагается теория основных граничных задач в липшицевых областях в тех же простейших пространствах для сильно эллиптических систем 2-го порядка. Она занимает существенное место в предлагаемой книге. Здесь мы развиваем и дополняем материал прекрасно написанной книги [87], к сожалению, не переведенной на русский язык. Существенных продвижений в этой теории за последние 12 лет было много. Что удалось сделать лично автору, отмечено в § 18 (в замечаниях к § 16). При изложении этой теории ее технические детали были подвергнуты некоторой методической чистке. Вряд ли эту теорию можно считать полностью завершенной. Эти параграфы и их продолжение в § 16 могут быть интересны для специалистов по теории уравнений в частных производных и функциональному анализу.

Автору в свое время довелось принять участие в разработке общей теории (псевдодифференциальных) эллиптических задач и соответствующих спектральных задач, а в недавние годы — теории задач в липшицевых областях. Последняя заставила несколько по-новому оценить классические вещи, что послужило одним из стимулов к написанию настоящей книги. Можно надеяться, что и читателю будет интересно сравнить эти теории.

Главным приоритетом для автора была доступность изложения. Поэтому формулировки или доказательства не везде приводятся в максимальной общности.

Начинающий математик заслуживает не только замкнутого изложения простейшего варианта теории, но также и объяснений того, что есть дальше, по возможности без излишних подробностей. Поэтому в книгу включена обзорная четвертая глава, посвященная обобщениям материала первых трех глав на пространства H_p^s бесселевых потенциалов и пространства B_p^s О. В. Бесова. Это важный, но довольно громоздкий материал, и на его полное изложение со всеми доказательствами ушло бы слишком много места. Разумеется, изложение сопровождается ссылками на литературу, главным образом на монографии. Эта глава начинается с очерка теории интерполяции в § 13, написанного с позиций «потребителя» этой замечательной теории. Хотя это обзорный параграф, в нем доказывается несколько очень полезных теорем. В § 16 также доказываются важные теоремы в дополнение к материалу главы III.

Мы отклоняемся от традиции доказывать все, которой обычно придерживаются авторы книг по математике, но стараемся комментировать все излагаемые определения и факты. Характер изложения у нас ближе к лекционному, чем к книжному. Для лектора важнее неформальная четкость, чем формальная полнота изложения.

В качестве справочника по соболевским пространствам и эллиптическим задачам эта книга не годится.

Мы пользуемся понятиями теории обобщенных функций, она кратко изложена в предыдущей книжке автора [2], на которую мы будем ссылаться. (Можно, конечно, пользоваться и другими книгами по обобщенным функциям, например книгой И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [13].) С другой стороны, продолжением настоящей книги должна стать третья книга [3]. Там, в частности, будет объяснена идея построения исчисления псевдодифференциальных эллиптических операторов, а здесь мы ограничиваемся классическим методом «замораживания коэффициентов», который не потерял своего значения, прозрачен и заслуживает освоения. По мнению автора, для начинающего аналитика это полезнее делать до изучения исчисления псевдодифференциальных операторов, не говоря уже о громоздком исчислении псевдодифференциальных эллиптических задач. Метод замораживания коэффициентов используется не только при исследовании «гладких» эллиптических задач, но и при выводе неравенства Гординга в липшицевых областях.

Однако псевдодифференциальные операторы будут неоднократно упоминаться, поэтому мы формулируем определения и несколько основных фактов их теории.

Для ориентировки читателя мы в ряде мест затрагиваем спектральные задачи, но без подробных доказательств теорем, лежащих в основе исследования этих задач. Изложение этих теорем тоже планируется в [3]. Также без доказательства приводятся формулы для асимптотик собственных значений.

В § 17 излагаются справочные сведения из общей теории линейных операторов. С доказательствами здесь изложен материал, относящийся к фредгольмовым операторам и к теореме Лакса—Мильграма. Затем формулируются некоторые основные факты спектральной теории операторов (п. 17.3) и утверждения, относящиеся к псевдодифференциальным операторам (п. 17.4).

§ 18 содержит комментарии к предыдущим параграфам. Кроме детализации ссылок на литературу, здесь упоминаются разделы теории эллиптических уравнений и задач для них, иногда обширные, примыкающие к изложенному материалу, но не затронутые в нем.

Автор снова благодарит своих слушателей, особенно Полину Вытнову, Николая Горева, Василия Новикова и Михаила Сурначёва, обсуждения с ними очень помогли при отборе материала и поиске наиболее доступной формы изложения.

Особую благодарность автор хотел бы выразить В. И. Овчинникову за чтение и критику первоначального текста § 13.

Величайшей удачей для автора оказалось то обстоятельство, что Татьяна Александровна Суслина согласилась взять на себя обязанности научного редактора. Она была первым читателем текста книги, как выяснилось, еще сырого. Благодаря ее высочайшей математической квалификации, исключительной добросовестности и интересу к тематике, она нашла не только очень много опечаток и мелких неточностей, но и ряд существенных математических дефектов, нуждавшихся в исправлении, а также возможных улучшений. В результате текст книги очень сильно улучшился.

Работа автора по сильно эллиптическим системам в липшицевых областях поддерживалась грантами РФФИ. Последний из них — 11-01-00277-а.

Автор будет благодарен читателям за любые замечания и просит присылать их по адресу `magran@orc.ru`

Предварительные замечания

Для положительного числа s через $[s]$ обозначается его целая часть.

Натуральными называются целые положительные числа.

Функционал $\varphi(x)$ над линейным пространством X называется *антилинейным,* или *сопряженно-линейным,* если

$$\varphi(\alpha x+\beta y)=\bar{\alpha}\varphi(x)+\bar{\beta}\varphi(y)$$

для любых элементов x, y из X и любых комплексных чисел α, β. Функционал $\Phi(x, y)$ называется *полуторалинейным,* если он линеен по первому аргументу и антилинеен по второму.

В понятие подпространства (в банаховом или гильбертовом пространстве) включается условие его замкнутости.

Функция $f(x)=f(x_1, \ldots, x_m)$ от нескольких вещественных или комплексных переменных называется положительно однородной степени h $(\in\mathbb{R})$, если $f(tx)=t^h f(x)$ при $t>0$.

Две нормы в банаховом пространстве называются *эквивалентными,* если их отношение заключено между положительными постоянными.

Постоянные C_k мы обычно нумеруем в пределах связных рассуждений; когда тема меняется, мы нумеруем их заново.

В случае, когда рассматривается пространство вектор-функций размерности m с элементами из пространства X, иногда пишут X^m. Мы не будем указывать размерность, она всегда будет ясна из контекста. Норму вектор-функции $f=(f_1, \ldots, f_m)$ можно определять равенствами

$$\|f\|=[\|f_1\|^p+\ldots+\|f_m\|^p]^{1/p}$$

с любым $p\geqslant 1$, эти нормы эквивалентны.

Интеграл без указания множества, по которому производится интегрирование, берется по $\mathbb{R}^n$.

Наши обозначения для производных: $D_j=-i\partial/\partial x_j=-i\partial_j$.

Глава I

Пространства H^s

§ 1. Пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$

1.1. Определение и простейшие свойства. Исходным будем считать следующее определение *пространства* $H^s(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n_x)$ *бесселевых потенциалов*. Пусть s — вещественное число. Введем сначала пространство $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n_\xi)$ измеримых по Лебегу комплекснозначных функций $\widehat{u}(\xi)$, для которых конечна величина

$$\int (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi. \tag{1.1.1}$$

Это линеал в пространстве Шварца $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\xi)$ обобщенных функций умеренного роста (см., например, [2, п. 3.1]). Пространство $H^s(\mathbb{R}^n_x)$ состоит из таких обобщенных функций $u \in \mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x)$, что преобразование Фурье

$$\widehat{u}(\xi) = Fu(\xi) = \int e^{-i\xi\cdot x} u(x)\, dx \tag{1.1.2}$$

в смысле обобщенных функций (см. [2, п. 5.2]) принадлежит $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n_\xi)$. Величина (1.1.1) принимается за квадрат нормы в $H^s(\mathbb{R}^n_x)$ и одновременно в $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n_\xi)$:

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n_x)} = \|\widehat{u}\|^2_{\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n_\xi)} = \int (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi. \tag{1.1.3}$$

Очевидно, что $H^s(\mathbb{R}^n)$ — линейное нормированное пространство. Его образ Фурье $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n)$ — это весовое пространство типа L_2. Такое пространство, как известно, полно и, значит, банахово. (См., например, [17, т. I, гл. III, п. 6].) Поэтому и $H^s(\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство. Более того, как и $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n)$, это *гильбертово пространство* со скалярным произведением

$$(u, v)_{s,\mathbb{R}^n_x} = (\widehat{u}, \widehat{v})_{s,\mathbb{R}^n_\xi} = \int (1+|\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)}\, d\xi. \tag{1.1.4}$$

Индекс $s=0$ будем опускать.

Очевидно, что $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|u\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^n)}$ при $s<\sigma$, так что пространство с бо́льшим индексом непрерывно вложено в пространство с меньшим индексом. Пространство $H^0(\mathbb{R}^n)$ совпадает с $L_2(\mathbb{R}^n)$ в силу равенства Парсеваля[1]

$$\int |Fu|^2\,d\xi = (2\pi)^n \int |u|^2\,dx \tag{1.1.5}$$

(нормы при этом совпадают с точностью до несущественного числового множителя). Поэтому *все пространства* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *с неотрицательным* s *состоят из обычных квадратично интегрируемых,* т. е. интегрируемых с квадратом модуля, *комплекснозначных функций*. Дельта-функция $\delta(x)$, поскольку ее преобразование Фурье — единица ([2, п. 5.2]), принадлежит $H^s(\mathbb{R}^n)$ при $s<-n/2$.

Далее, у функций из $H^1(\mathbb{R}^n)$ производные первого порядка в смысле обобщенных функций принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$. Действительно, $D_j u(x) = -i\partial u(x)/\partial x_j$ — обратное преобразование Фурье от квадратично интегрируемой функции $\xi_j \widehat{u}(\xi)$ (см. [2, § 5]). Мы можем поэтому дать второе определение пространства $H^1(\mathbb{R}^n)$: оно состоит из таких функций $u(x)$ из $L_2(\mathbb{R}^n)$, что все их первые производные $D_j u(x)$ в смысле обобщенных функций тоже являются функциями из $L_2(\mathbb{R}^n)$; при этом норма определяется формулой

$$\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \int \left[|u(x)|^2 + \sum_1^n |D_j u(x)|^2 \right] dx. \tag{1.1.6}$$

Совпадение этой формулы с (1.1.3) при $s=1$ с точностью до числового множителя следует из равенства Парсеваля.

Более общий и легко проверяемый факт состоит в следующем.

Теорема 1.1.1. *При натуральном* m *пространство* $H^m(\mathbb{R}^n)$ *состоит из таких квадратично интегрируемых функций, что их производные в смысле обобщенных функций до порядка* m *включительно — квадратично интегрируемые функции. При этом норму в* $H^m(\mathbb{R}^n)$ *можно определить равенством*

$$\|u\|'^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \int \sum_{|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha u(x)|^2\,dx. \tag{1.1.7}$$

Соответствующее скалярное произведение имеет вид

$$(u,v)'_{m,\mathbb{R}^n} = \int \sum_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha u(x)\cdot \overline{D^\alpha v(x)}\,dx. \tag{1.1.8}$$

[1] Множитель $(2\pi)^n$ станет ненужным (и преобразование Фурье станет унитарным), если в формуле (1.1.2) написать $(2\pi)^{-n/2}$ перед знаком интеграла. Но мы придерживаемся обозначений в [13] и [2].

Как в [2] и во многих других книгах,

$$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n,\quad |\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n,\quad D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}.$$

Нормы $\|u\|'_m$ *и* $\|u\|_m$ *эквивалентны*, это следует из очевидного неравенства

$$0<C_1\leqslant\frac{\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}|\xi^\alpha|^2}{(1+|\xi|^2)^m}\leqslant C_2, \tag{1.1.9}$$

где $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_n^{\alpha_n}$ и постоянные C_1 и C_2 не зависят от ξ.

Именно так соболевские пространства $H^m=W_2^m$ натурального порядка m были введены в [2, п. 3.6]. По существу это и есть определение С. Л. Соболева (у него m целое неотрицательное, но он рассматривал также пространства W_p^m с целым неотрицательным m и $p>1$, о которых мы будем говорить в § 14).

Отметим еще одну возможность, состоящую в том, что в суммах справа в (1.1.7) и (1.1.8) оставляются только слагаемые с $\alpha=(0,\dots,0)$, $(m,0,\dots,0)$, $\dots$, $(0,\dots,0,m)$. Такое определение тоже эквивалентно исходному.

Замечания. 1. Из (1.1.9) следует также, что *любой оператор в частных производных с постоянными коэффициентами порядка m действует ограниченным образом из $H^s(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ при любом* $s\in\mathbb{R}$. Немного дальше, в п. 1.9, мы обобщим это утверждение на операторы с «достаточно хорошими» переменными коэффициентами.

2. Как видно из определения, при нецелом положительном s, $s=m+\theta$, $m\in\mathbb{Z}_+$, $0<\theta<1$, пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех функций, принадлежащих $H^m(\mathbb{R}^n)$, у которых производные порядка m принадлежат $H^\theta(\mathbb{R}^n)$.

Задача. Проверьте, что нормы в $H^s(\mathbb{R}^n)$ инвариантны относительно сдвигов: для $u_h(x)=u(x+h)$

$$\|u_h\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}=\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\quad\text{и}\quad\|u_h\|'_{H^m(\mathbb{R}^n)}=\|u\|'_{H^m(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.1.10}$$

Положим

$$H^\infty(\mathbb{R}^n)=\bigcap H^s(\mathbb{R}^n),\quad H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)=\bigcup H^s(\mathbb{R}^n). \tag{1.1.11}$$

1.2. Теоремы вложения. Из сказанного выше видно, что элементы пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ тем «лучше», чем больше s. Еще более отчетливо это видно из *теорем вложения*, доказанных С. Л. Соболевым для натуральных s. Простейшая теорема вложения состоит в следующем.

Теорема 1.2.1. *Пусть s вещественно и $s>n/2$. Тогда любая функция $u(x)$ из $H^s(\mathbb{R}^n)$ равномерно непрерывна и ограничена после, возможно, исправления на множестве нулевой лебеговой меры. При этом справедливо неравенство*

$$\sup|u(x)| \leqslant C_1\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \tag{1.2.1}$$

с не зависящей от $u(x)$ постоянной C_1. Более того, при

$$0<\vartheta<s-n/2, \quad \vartheta<1 \tag{1.2.2}$$

функция $u(x)$ удовлетворяет равномерному условию Гёльдера порядка ϑ. При этом

$$\sup_{x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\vartheta} \leqslant C_2\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \tag{1.2.3}$$

с не зависящей от u постоянной C_2.

Доказательство. При сделанных предположениях преобразование Фурье $\widehat{u}(\xi)$ функции $u(x)$ — суммируемая функция: в силу неравенства Шварца

$$\int|\widehat{u}(\xi)|\,d\xi \leqslant \Big(\int(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{1/2}\Big(\int(1+|\xi|^2)^{-s}\,d\xi\Big)^{1/2} = \\ = C_3\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.2.4}$$

так как последний интеграл сходится. Поэтому почти всюду

$$u(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}\widehat{u}(\xi)\,d\xi. \tag{1.2.5}$$

Действительно, $u(x)$ как обобщенная функция восстанавливается по своему преобразованию Фурье формулой (см. п. 5.2 в [2])

$$\langle u,\varphi\rangle=\langle\widehat{u},F^{-1}[\varphi]\rangle=\int\widehat{u}(\xi)\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}\varphi(x)\,dx\,d\xi.$$

Здесь φ — любая функция из пространства Шварца $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ быстро убывающих со всеми производными бесконечно гладких функций [2]. В правой части можно поменять местами интегралы по теореме Фубини:

$$\langle u,\varphi\rangle=\int\varphi(x)\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}\widehat{u}(\xi)\,d\xi\,dx,$$

и видно, что функция $u(x)$ должна совпадать с правой частью в (1.2.5) почти всюду. Теперь можно воспользоваться известным фактом из анализа: (обратное) преобразование Фурье от суммируемой функции — непрерывная ограниченная функция. Это, впрочем, легко проверяется. Более того, из (1.2.5) и (1.2.4) следует (1.2.1).

Для проверки равномерной непрерывности функции $u(x)$ можно использовать оценку

$$|u(x)-u(y)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^n}\int |e^{i(x-y)\cdot\xi}-1||\widehat{u}(\xi)|\,d\xi.$$

Разобьем интеграл справа на интеграл по шару

$$O_R(0)=\{\xi : |\xi| \leqslant R\}$$

и по его дополнению. При заданном $\varepsilon>0$ интеграл по дополнению меньше $\varepsilon/2$, если R достаточно велико (см. (1.2.4)). При фиксированном R интеграл по шару меньше $\varepsilon/2$, если модуль $|x-y|$ достаточно мал.

Равномерная непрерывность следует, конечно, и из неравенства (1.2.3). Для его проверки заметим, что

$$\begin{aligned}|e^{iz\cdot\xi}-1|^2 &= [\cos(z\cdot\xi)-1]^2+\sin^2(z\cdot\xi) = \\ &= 2-2\cos(z\cdot\xi) = 4\sin^2[(z\cdot\xi)/2].\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Поэтому

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\vartheta}} \leqslant (2\pi)^{-n}\int \frac{2|\sin[(x-y)\cdot\xi/2]|}{|x-y|^{\vartheta}|\xi|^{\vartheta}}|\xi|^{\vartheta}|\widehat{u}(\xi)|\,d\xi. \tag{1.2.7}$$

Легко проверяется, что дробь под знаком интеграла ограничена постоянной:

$$\frac{2|\sin[(x-y)\cdot\xi/2]|}{|x-y|^{\vartheta}|\xi|^{\vartheta}} \leqslant C_4. \tag{1.2.8}$$

Действительно, для этого достаточно воспользоваться неравенством $|\sin t| \leqslant |t|$ при $|t| \leqslant \pi/2$ и неравенством $|\sin t| \leqslant 1$ при остальных $|t|$. Остается учесть, что в силу неравенства Шварца

$$\begin{aligned}&\int (1+|\xi|^2)^{\vartheta/2}|\widehat{u}(\xi)|\,d\xi \leqslant \\ &\qquad \leqslant \Big(\int (1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{1/2}\Big(\int (1+|\xi|^2)^{-s+\vartheta}\,d\xi\Big)^{1/2},\end{aligned}$$

где по предположению $-s+\vartheta<-n/2$. □

Задача 1. Дополнительно покажите, используя аппроксимацию функции $\widehat{u}(\xi)$ в $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n)$ финитными гладкими функциями, что при предположениях теоремы $u(x)\to 0$ при $x\to\infty$.

Пример. Убедимся в точности условия $s > n/2$ следующим образом. Пусть $n = 1$, $s = 1/2$. Рассмотрим семейство функций $u_t(x)$ с преобразованиями Фурье $\widehat{u}_t(\xi) = (1 + |\xi|)^{-t}$, $t > 1$. Все эти функции принадлежат $H^{1/2}(\mathbb{R})$. Для этого семейства функций неравенство (1.2.1) с $s = 1/2$ неверно. Действительно, так как функции $\widehat{u}_t(\xi)$ абсолютно интегрируемы, то

$$u_t(0) = (2\pi)^{-1} \int (1 + |\xi|)^{-t}\, d\xi.$$

С точностью до постоянного множителя эта величина равна $(t-1)^{-1}$. С другой стороны, квадрат нормы функции $u_t(x)$ в $H^{1/2}(\mathbb{R})$ имеет тот же порядок при $t \to 1$. Действительно, соответствующий интеграл

$$\int (1 + |\xi|^2)^{1/2} (1 + |\xi|)^{-2t}\, d\xi$$

легко вычисляется, если в нем заменить $1 + |\xi|^2$ на $(1 + |\xi|)^2$, и он имеет порядок $(t-1)^{-1}$. Остается заметить, что неравенство

$$(t-1)^{-1} \leqslant C(t-1)^{-1/2}$$

с любой постоянной C неверно, конечно, при малых $t - 1$.

Введем *пространства* $C_b^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geqslant 0$. Пространство $C_b^m(\mathbb{R}^n)$ с целым неотрицательным $s = m$ состоит из функций с непрерывными и ограниченными производными до порядка m включительно и нормой

$$\|u\|_{C_b^m(\mathbb{R}^n)} = \sup |D^\alpha u(x)|, \tag{1.2.9}$$

где верхняя грань берется по всем $x \in \mathbb{R}^n$ и всем α с $|\alpha| \leqslant m$. Пространство $C_b^{m+\vartheta}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \vartheta < 1$, называемое *пространством Гёльдера*, состоит из всех функций пространства $C_b^m(\mathbb{R}^n)$, у которых старшие производные удовлетворяют равномерному условию Гёльдера порядка ϑ; норма в $C_b^{m+\vartheta}(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$\|u\|_{C_b^{m+\vartheta}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{C_b^m(\mathbb{R}^n)} + \sup \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\vartheta}, \tag{1.2.10}$$

где верхняя грань берется по всем x и y, $x \neq y$, и всем α с $|\alpha| = m$. При $s = 0$ будем писать $C_b(\mathbb{R}^n)$. Наш значок $_b$ указывает на равномерную ограниченность. Если он опущен, то имеются в виду все функции указанной гладкости в $\mathbb{R}^n$.

Замечание. Пространства $C_b^{m+\vartheta}(\mathbb{R}^n)$ обозначают также через $C_b^{m,\vartheta}(\mathbb{R}^n)$. Последнее пространство определяется и при $\vartheta = 1$: оно состоит из функций $u(x)$, принадлежащих $C_b^m(\mathbb{R}^n)$, производные порядка m которых удовлетворяют равномерному *условию Липшица* — условию Гёльдера порядка 1. Норма в нем определяется формулой (1.2.10) с $\vartheta = 1$. Согласно известной теореме функция, удовлетворяющая условию Липшица, почти всюду дифференцируема и имеет ограниченные первые производные. (Мы докажем эту теорему в § 9.) Поэтому функции из $C_b^{m,1}(\mathbb{R}^n)$ почти всюду имеют производные порядка $m+1$ и эти производные ограничены.

Утверждению теоремы 1.2.1 можно придать следующую форму: *при $s \geqslant n/2+\theta$, где $0<\theta<1$, пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вложено в пространство $C_b^{\vartheta}(\mathbb{R}^n)$, если $0<\vartheta<\theta$.* Легко получается следующее обобщение.

Теорема 1.2.2. *Пусть $s \geqslant n/2+m+\theta$, где m — целое неотрицательное число и $0<\theta<1$. Тогда пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вложено в пространство $C_b^{m+\vartheta}(\mathbb{R}^n)$ при $0<\vartheta<\theta$.*

Здесь, как и раньше и позже в подобных утверждениях, подразумевается возможное исправление функций на множестве нулевой меры.

Задача 2. Проверьте утверждение теоремы 1.2.2.

Замечание. Этим результатам можно придать и такую форму. *При $s>n/2+t$, где $t>0$, пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вложено в пространство $C_b^t(\mathbb{R}^n)$.*

Но это утверждение можно усилить: *если t нецелое, то непрерывное вложение имеет место и при $s=n/2+t$.* См. [52, п. 2.8.1]. Доказательство требует привлечения дополнительных технических средств, и мы не будем его воспроизводить.

Следствие 1.2.3. *Если и принадлежит $H^\infty(\mathbb{R}^n)$, то это бесконечно гладкая функция с ограниченными квадратично интегрируемыми производными всех порядков после, возможно, исправления этой функции на множестве нулевой меры.*

Следующую теорему для натуральных s тоже доказал С. Л. Соболев.

Теорема 1.2.4. *Пусть $0<s<n/2$ и*

$$s \geqslant \frac{n}{2}-\frac{n}{p}, \quad 2<p<\infty. \tag{1.2.11}$$

Тогда пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вложено в пространство $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Это означает, что

$$\|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leqslant C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.2.12}$$

Доказательство этой теоремы в несколько ослабленной формулировке (со строгим неравенством для s в (1.2.11)) мы наметим в п. 1.15 со ссылкой на неравенство Юнга, которое получим в п. 13.2 из интерполяционных соображений. Элементарные свéдения о пространствах L_p помещены в п. 13.1. Сейчас и в п. 1.15 достаточно знать, что $L_p(\mathbb{R}^n)$ при $1 \leqslant p < \infty$ — банахово пространство с нормой слева в (1.2.12) и что в нем плотно множество финитных гладких функций.

1.3. Пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ отрицательного порядка.

Теорема 1.3.1. *При натуральном m пространство $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ состоит из конечных сумм производных до порядка m включительно в смысле обобщенных функций от функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Как мы уже отметили в конце п. 1.1, дифференцирование порядка m переводит функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ в функции из $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$. Пусть теперь $u \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ и $\widehat{u}(\xi) = Fu$. Тогда

$$w(\xi) = (1 + |\xi_1|^m + \ldots + |\xi_n|^m)^{-1}\widehat{u}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n),$$

так как

$$0 < C_1 \leqslant \frac{1 + |\xi_1|^m + \ldots + |\xi_n|^m}{(1 + |\xi|^2)^{m/2}} \leqslant C_2$$

с не зависящими от ξ постоянными. Значит,

$$\widehat{u}(\xi) = w(\xi) + \xi_1^m w_1(\xi) + \ldots + \xi_n^m w_n(\xi)$$

почти всюду, где $w_j(\xi) = (|\xi_j|/\xi_j)^m w(\xi)$ при $\xi_j \neq 0$ и $w_j(\xi) = 0$ в противном случае. Функции w_j принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$. Поэтому

$$u = u_0 + D_1^m u_1 + \ldots + D_n^m u_n$$

в смысле обобщенных функций, где все функции $u_j(x)$ принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$. □

Следствие 1.3.2. *Пространство $H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ содержит все обобщенные функции с компактными носителями.*

Действительно, непрерывная функция с компактным носителем принадлежит, конечно, $L_2(\mathbb{R}^n)$, так что достаточно воспользоваться теоремой о структуре финитной обобщенной функции: это конечная сумма производных некоторых порядков (в смысле обобщенных функций) от финитных непрерывных функций ([2, теорема 1.9.3]). □

1.4. Изометрические изоморфизмы Λ^t. Следующее предложение — модель для некоторых теорем теории эллиптических операторов в § 6 и [3]. Через I обозначаем единичный оператор, через Δ — оператор Лапласа.

Теорема 1.4.1. *Оператор $I-\Delta$ изоморфно и изометрически отображает пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ на пространство $H^{s-2}(\mathbb{R}^n)$ при любом s.*

Точнее, изометрия имеет место при нашем первоначальном определении пространств $H^s(\mathbb{R}^n)$. Действительно, в образах Фурье оператор $I-\Delta$ действует как умножение на $1+|\xi|^2$. Пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ очень удобны для рассмотрения этого оператора. В [3] мы увидим, что они удобны и при построении общей теории эллиптических псевдодифференциальных операторов.

Вот ближайшее и очевидное обобщение.

Теорема 1.4.2. *Пусть s и t — любые вещественные числа. Тогда оператор*

$$\Lambda^t = F^{-1}(1+|\xi|^2)^{t/2}F \tag{1.4.1}$$

изоморфно и изометрически отображает пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ на пространство $H^{s-t}(\mathbb{R}^n)$. Обратным к нему является оператор Λ^{-t}.

Как видно из нашего обзора в п. 17.4, оператор (1.4.1) — это пример эллиптического псевдодифференциального оператора порядка t. Он на самом деле является степенью порядка $t/2$ оператора $1-\Delta$. В частности, $\Lambda^2=-\Delta+1$.

Функцию $\Lambda^t g$, где $g\in L_2(\mathbb{R}^n)$, по крайней мере при отрицательных t, иногда называют *бесселевым потенциалом порядка t*. Пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ можно определить как $\Lambda^{-s}L_2(\mathbb{R}^n)$ — образ пространства $L_2(\mathbb{R}^n)$ при действии на него оператора Λ^{-s}. Видимо, в связи с этим пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ и называют пространствами бесселевых потенциалов. Более общие пространства H^s_p бесселевых потенциалов будут рассмотрены в § 14. У этих пространств есть, впрочем, и другие названия, мы их там укажем.

1.5. Плотные подмножества. Пространство $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ содержится, конечно, во всех пространствах $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.5.1. *При любом s пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ совпадает с пополнением пространства $\mathcal{S}$ по норме $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$.*

Доказательство. Пусть $u\in H^s(\mathbb{R}^n)$. Тогда функция $(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}(\xi)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^n_\xi)$ и может быть там приближена финитными бесконечно гладкими функциями $v_k(\xi)$. Запишем v_k в виде

$$v_k(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2} w_k(\xi), \quad \text{где } w_k(\xi) = \frac{v_k(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}.$$

Конечно, $w_k(\xi)$ — тоже финитные бесконечно гладкие функции, и они сходятся к $\widehat{u}(\xi)$ в пространстве $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n)$. Их прообразы Фурье заведомо принадлежат $\mathcal{S}$ и сходятся к u в $H^s(\mathbb{R}^n)$. □

Следствие 1.5.2. *Если $\sigma > s$, то пространство $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ плотно в $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Усилим утверждение теоремы 1.5.1.

Теорема 1.5.3. *При любом s пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ является пополнением линеала $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по норме в $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что любую функцию $u(x)$ из $\mathcal{S}$ можно аппроксимировать финитными бесконечно гладкими функциями по норме в $H^s(\mathbb{R}^n)$. Более того, достаточно показать это при натуральном s, что мы сейчас и сделаем. Пусть $\varphi(x)$ — функция из $\mathcal{D}$, равная 1 при $|x| \leqslant 1$. Положим

$$u_\varepsilon(x) = u(x)\varphi(\varepsilon x).$$

Тогда $u_\varepsilon \to u$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$, и при любом α, $0 < |\alpha| \leqslant s$,

$$D^\alpha[u_\varepsilon(x) - u(x)] = \\ = D^\alpha u(x) \cdot [\varphi(\varepsilon x) - 1] + \sum c_{\beta\gamma} D^\beta u(x) \cdot D^\gamma \varphi(\varepsilon x), \quad (1.5.1)$$

где $\alpha = \beta + \gamma$ и $\gamma \neq 0$. Так как

$$D^\gamma \varphi(\varepsilon x) = \varepsilon^{|\gamma|}(D^\gamma \varphi)(\varepsilon x),$$

то ясно, что правая часть в (1.5.1) стремится к 0 в $L^2(\mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$. Значит, $u_\varepsilon \to u$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$. □

Мы видим, что *при любом s пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ можно определить как пополнение линеала $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме в этом пространстве.*

Эти утверждения будут дополнены в п. 1.11.

Задача. Проверьте, что если $s > 0$, $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $u_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $u_k \to u$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$, то $D^\alpha u_k \to D^\alpha u$ в $H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha| \leqslant s$. (См. замечание 1 в п. 1.1.)

1.6. Линейные непрерывные функционалы над $H^s(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим вопрос об описании, или реализации, пространства, сопряженного к пространству $H^s(\mathbb{R}^n)$, т. е. пространства линейных непрерывных функционалов над $H^s(\mathbb{R}^n)$. Таких реализаций имеется две.

Первая состоит в том, что, поскольку $H^s(\mathbb{R}^n)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением (1.1.4), *общий вид линейного непрерывного функционала $f(u)$ над $H^s(\mathbb{R}^n)$ есть*

$$f(u) = (u, v)_{s,\mathbb{R}^n}, \tag{1.6.1}$$

где v — любой фиксированный элемент из $H^s(\mathbb{R}^n)$, он однозначно определяется по f.

Вторая состоит в использовании *двойственности между $H^s(\mathbb{R}^n)$ и $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$*. Дело в том, что *форма* $(u, v)_{\mathbb{R}^n} = (u, v)_{0,\mathbb{R}^n}$ на $H^0(\mathbb{R}^n)$ (индекс 0 у формы будем опускать) *продолжается на прямое произведение $H^s(\mathbb{R}^n) \times H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ по формуле*

$$(u, v)_{\mathbb{R}^n} = \int \widehat{u}(\xi) \cdot \overline{\widehat{v}(\xi)}\, d\xi \tag{1.6.2}$$

и при этом так продолженная форма удовлетворяет обобщенному неравенству Шварца

$$|(u, v)_{\mathbb{R}^n}| \leqslant \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.6.3}$$

Последнее получается применением к

$$\int \widehat{u}(\xi) \cdot \overline{\widehat{v}(\xi)}\, d\xi = \int (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{u}(\xi) \cdot (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \overline{\widehat{v}(\xi)}\, d\xi$$

обычного неравенства Шварца.

Теорема 1.6.1. *При любом s каждый линейный непрерывный функционал $f(u)$ над $H^s(\mathbb{R}^n)$ может быть представлен в виде*

$$f(u) = (u, w)_{\mathbb{R}^n}, \tag{1.6.4}$$

где w — элемент из $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, однозначно определяемый по f. И обратно, при любом $w \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ выражение (1.6.4) *есть линейный непрерывный функционал над $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Второе утверждение очевидно. Чтобы проверить первое, положим $u_1 = \Lambda^s u$ (см. (1.4.1)). Тогда $u_1 \in H^0(\mathbb{R}^n)$ и $g(u_1) = f(u)$ — линейный непрерывный функционал над $H^0(\mathbb{R}^n)$. Поэтому

$$f(u) = \int \widehat{u}_1(\xi) \overline{\widehat{v}_1(\xi)}\, d\xi = \int (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}_1(\xi)}\, d\xi,$$

где $v_1 \in H^0(\mathbb{R}^n)$. Отсюда видно, что

$$f(u) = (u, w)_{\mathbb{R}^n}, \quad \text{где } w = \Lambda^s v_1 \in H^{-s}(\mathbb{R}^n). \qquad \square$$

Замечание. Очевидно, что эти две реализации одного и того же линейного непрерывного функционала над $H^s(\mathbb{R}^n)$ связаны следующим образом:

$$(u, v)_{s,\mathbb{R}^n} = (u, w)_{\mathbb{R}^n}, \quad \text{где } w = \Lambda^{2s} v. \tag{1.6.5}$$

Отметим еще, что в отличие от [2] мы теперь как правило будем пользоваться скалярными произведениями, т. е. полуторалинейными формами, а не билинейной формой $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Можно было бы и не устраивать таких различий при изложении теории обобщенных функций и теории пространств типа Соболева, но так будет ближе к традиции.

1.7. Нормы дробного положительного порядка. Как мы видели, при натуральных s в $H^s(\mathbb{R}^n)$ есть норма, которая записывается без преобразования Фурье. Сейчас мы укажем такую норму для нецелых положительных s.

Теорема 1.7.1. *Пусть $s = m + \theta$, где m — целое неотрицательное число и $0 < \theta < 1$. Тогда норма в $H^s(\mathbb{R}^n)$ эквивалентна норме, определяемой равенством*

$$\|u\|'^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|u\|'^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=m} \iint \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\, dx\, dy. \tag{1.7.1}$$

Пространства $H^s(\mathbb{R}^n) = W_2^s(\mathbb{R}^n)$ с нецелыми $s > 0$ как пространства с нормами (1.7.1) ввел Л. Н. Слободецкий [160]. Эти нормы тоже инвариантны относительно сдвигов.

Доказательство теоремы. Рассмотрим случай $m = 0$ и вычислим интеграл

$$\iint \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\, dx\, dy \tag{1.7.2}$$

через преобразование Фурье $\widehat{u}(\xi)$ функции $u(x)$, считая ее финитной и бесконечно гладкой. Результат, который нужно получить, приведен ниже в формуле (1.7.5). Интеграл (1.7.2) абсолютно сходится, так как на компакте $\operatorname{supp} u(x) \times \operatorname{supp} u(y)$ особенность при $x = y$ интегрируема (имеет с учетом гладкости $u(x)$ порядок $n - 2 + 2\theta$), а вне этого множества интегрируемы $|u(x)|^2 |x-y|^{-n-2\theta}$

и $|u(y)|^2|x-y|^{-n-2\theta}$. Полагая $y=x+z$, перепишем этот интеграл в виде «повторного» интеграла

$$\int \frac{1}{|z|^{n+2\theta}}\,dz \int |u(x)-u(x+z)|^2\,dx. \tag{1.7.3}$$

Внутренний интеграл в силу равенства Парсеваля (1.1.5) равен с точностью до постоянного множителя

$$\int |1-e^{iz\cdot\xi}|^2|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi.$$

Здесь согласно формуле (1.2.6)

$$|1-e^{iz\cdot\xi}|^2 = 4\sin^2[(z\cdot\xi)/2].$$

Подставив все это в (1.7.3) и изменив порядок интегрирования по теореме Фубини, рассмотрим получающийся интеграл

$$4\int |\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi \int \frac{\sin^2[(z\cdot\xi)/2]}{|z|^{n+2\theta}}\,dz. \tag{1.7.4}$$

Здесь внутренний интеграл запишем в виде

$$\int \sin^2\Bigl(\frac{1}{2}|z||\xi|\cos\varphi\Bigr)\frac{dz}{|z|^{n+2\theta}},$$

где φ — угол между векторами z и ξ. Перейдем к сферическим координатам: $z=r\omega$, $|\omega|=1$, $dz=r^{n-1}dr\,dS$. Получим «повторный» интеграл

$$\int\limits_S dS \int\limits_0^\infty \sin^2\Bigl(\frac{1}{2}r|\xi|\cos\varphi\Bigr)\frac{dr}{r^{1+2\theta}},$$

где S — единичная сфера. Здесь во внутреннем интеграле сделаем замену $\frac{1}{2}r|\xi|\cos\varphi=\tau$ (перейдем от переменного r к переменному τ). Получим

$$2^{-2\theta}|\xi|^{2\theta}\int\limits_S \cos^{2\theta}\varphi\,dS \int\limits_0^\infty \frac{\sin^2\tau}{\tau^{1+2\theta}}d\tau = C'_\theta|\xi|^{2\theta},$$

где постоянная C'_θ не зависит от ξ. Мы показали, что

$$\iint \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\,dx\,dy = 4C_\theta\int |\xi|^{2\theta}|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi, \tag{1.7.5}$$

где постоянная C_θ тоже не зависит от ξ. Этот результат предельным переходом распространяется на $u\in H^\theta(\mathbb{R}^n)$. Этим теорема фактически доказана для $m=0$. На ненулевые m она распространяется очевидным образом. □

Задача. Напишите скалярное произведение, отвечающее норме (1.7.1).

1.8. Оценки промежуточных норм.

Предложение 1.8.1. *Пусть $\tau < s < \sigma$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $C_\varepsilon > 0$, что для функций $u \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство*

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varepsilon \|u\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^n)} + C_\varepsilon \|u\|_{H^\tau(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.8.1}$$

Доказательство. Эквивалентное утверждение состоит в справедливости оценки вида

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varepsilon^2 \|u\|^2_{H^\sigma(\mathbb{R}^n)} + C'_\varepsilon \|u\|^2_{H^\tau(\mathbb{R}^n)} \tag{1.8.2}$$

при любом $\varepsilon > 0$. Последняя получается из очевидного факта: при заданном $\varepsilon > 0$ найдется такое C'_ε, что

$$(1 + |\xi|^2)^s \leqslant \varepsilon^2 (1 + |\xi|^2)^\sigma + C'_\varepsilon (1 + |\xi|^2)^\tau. \qquad \square$$

1.9. Мультипликаторы. Теперь мы обсудим условия, достаточные для того, чтобы оператор умножения на функцию $a(x)$ был ограничен в $H^s(\mathbb{R}^n)$, т. е. чтобы она была мультипликатором в этом пространстве, и выясним, как оценивается его норма.

Общеизвестно, что *в $L_2(\mathbb{R}^n)$ ограничен оператор умножения на ограниченную измеримую функцию, а его норма не превосходит верхней грани модуля этой функции*. Ее, конечно, достаточно считать ограниченной в существенном, т. е. ограниченной вне множества нулевой меры. Из сказанного сразу получается (с использованием формулы Лейбница для производной произведения)

Теорема 1.9.1. *Пусть m — натуральное число и функция $a(x)$ принадлежит $C_b^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$. Тогда оператор умножения на $a(x)$ ограничен в $H^m(\mathbb{R}^n)$. При этом*

$$\|au\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 \sup |a(x)| \|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|a\|_{C_b^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{H^{m-1}(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.9.1}$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят ни от u, ни от a.

В частности, для ограниченности этого оператора достаточно, чтобы функция $a(x)$ принадлежала пространству $C_b^m(\mathbb{R}^n)$. Теперь рассмотрим нецелые s.

Теорема 1.9.2. *Пусть m — целое неотрицательное число и $s = m + \theta$, $0 < \theta < 1$. Пусть функция $a(x)$ принадлежит пространству $C_b^{m+\vartheta}(\mathbb{R}^n) = C_b^{m,\vartheta}(\mathbb{R}^n)$, где $\vartheta \in (\theta, 1)$. Тогда оператор умножения на*

$a(x)$ ограничен в $H^s(\mathbb{R}^n)$. При этом

$$\|au\|_{H^{m+\theta}(\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sup|a(x)|\|u\|_{H^{m+\theta}(\mathbb{R}^n)} + C_2\|a\|_{C_b^{m+\vartheta}(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.9.2)$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят ни от u, ни от a.

Доказательство проведем для $m = 0$. Предполагая, что $u \in \in H^\theta(\mathbb{R}^n)$, надо оценить величину

$$\iint \frac{|a(x)u(x) - a(y)u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\,dx\,dy \quad (1.9.3)$$

через $\|u\|^2_{H^\theta(\mathbb{R}^n)}$. Ясно, что

$$|a(x)u(x) - a(y)u(y)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2|a(x)[u(x)-u(y)]|^2 + 2|[a(x)-a(y)]u(y)|^2.$$

Поэтому величина (1.9.3) не превосходит

$$2\sup|a(x)|^2\|u\|^2_{H^\theta(\mathbb{R}^n)} + 2\int|u(y)|^2 I(y)\,dy,$$

где

$$I(y) = \int \frac{|a(x)-a(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\,dx, \quad (1.9.4)$$

и дело сводится к оценке этого интеграла через $\|a\|^2_{C_b^\vartheta(\mathbb{R}^n)}$. Пусть $C_1 > 0$. Подынтегральное выражение не превосходит $C_2'|x-y|^{-n+2(\vartheta-\theta)}$ при $|x-y| \leqslant C_1$ и $C_3'|x-y|^{-n-2\theta}$ при $|x-y| \geqslant C_1$, где C_2' и C_3' пропорциональны $\|a\|^2_{C_b^\vartheta(\mathbb{R}^n)}$, что и дает нужную оценку. □

С учетом предложения 1.8.1 из (1.9.2) следует, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $C_3(\varepsilon)$, с которой

$$\|au\|_{H^{m+\theta}(\mathbb{R}^n)} \leqslant (C_1\sup|a(x)| + \varepsilon)\|u\|_{H^{m+\theta}(\mathbb{R}^n)} + C_3(\varepsilon)\|u\|_{H^0(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.9.5)$$

В приведенных теоремах интересны, во-первых, достаточная гладкость мультипликатора, во вторых, коэффициент «главной части» в оценке его нормы.

Условие ограниченности и непрерывности функции $a(x)$ с производными до порядка m включительно достаточно, конечно, для ограниченности оператора умножения на $a(x)$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$ при нецелых $s \in (0, m)$.

Для целей теории эллиптических уравнений в главе II нужно несколько развить полученный результат.

Лемма 1.9.3. *Пусть для линейного ограниченного оператора T в $H^s(\mathbb{R}^n)$ справедлива оценка*

$$\|Tu\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant K_1\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} + K_2\|u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.9.6}$$

при $s_0 \leqslant s \leqslant s_1$ с некоторыми постоянными K_1 и K_2, не зависящими от s. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ оператор T допускает представление

$$T = T_1 + T_2, \tag{1.9.7}$$

где T_2 — ограниченный оператор из $H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$, а для T_1 справедлива оценка

$$\|T_1u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant (K_1 + \varepsilon)\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \tag{1.9.8}$$

при тех же s.

Доказательство. Пусть $\psi(t) = \psi_R(t)$ — бесконечно гладкая функция на луче $\mathbb{R}_+$, равная 1 при $t \leqslant R$, 0 при $t \geqslant R+1$ и заключенная между нулем и единицей при $R < t < R+1$. Положим

$$T_2 = TF^{-1}\psi(|\xi|)F, \quad T_1 = T - T_2. \tag{1.9.9}$$

Так как функция $\psi(|\xi|)$ финитна, то T_2 обладает нужным свойством ограниченности. Далее, для $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ и $v = (1 - F^{-1}\psi(|\xi|)F)u$ имеем

$$\|T_1u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|Tv\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant K_1\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} + K_2\|v\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \\ \leqslant K_1\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} + K_2(1+R^2)^{-1/2}\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Остается взять R достаточно большим. □

Следствие 1.9.4. *Пусть $a(x)$ — функция из $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любого $s_1 > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ оператор T умножения на $a(x)$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant s \leqslant s_1$, допускает представление* (1.9.7), *где*

$$\begin{gathered} \|T_1u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant (C\sup|a(x)| + \varepsilon)\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \\ \|T_2u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\varepsilon)\|u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)} \end{gathered} \tag{1.9.10}$$

с постоянными, не зависящими от u и s; C не зависит также и от a.

Рассмотрим теперь вопрос об ограниченности оператора умножения на $a(x)$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$ с *отрицательным* s. Напомним, что пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ и $H^{|s|}(\mathbb{R}^n)$ сопряжены относительно продолжения формы $(\ ,\ )_{\mathbb{R}^n}$. На финитных гладких функциях, конечно,

$$(au, v)_{\mathbb{R}^n} = (u, \bar{a}v)_{\mathbb{R}^n}, \tag{1.9.11}$$

поэтому сопряженным к оператору умножения на a в $H^s(\mathbb{R}^n)$ должен быть оператор умножения на $\bar{a}$ в $H^{|s|}(\mathbb{R}^n)$. Оператор в данном пространстве ограничен тогда и только тогда, когда сопряженный оператор ограничен в сопряженном пространстве; более того, они имеют одинаковые нормы. Очевидно, что операторы умножения на $a(x)$ и на $\overline{a(x)}$ одновременно ограничены в $H^{|s|}(\mathbb{R}^n)$ или нет. Получаем следующий вполне удобный результат.

Теорема 1.9.5. *Пусть s отрицательно и оператор умножения на $a(x)$ ограничен в $H^{|s|}(\mathbb{R}^n)$. Тогда, будучи определен в $H^s(\mathbb{R}^n)$ соотношением* (1.9.11), *он ограничен в этом пространстве и имеет ту же норму, что и в $H^{|s|}(\mathbb{R}^n)$.*

Утверждение следствия 1.9.4 распространяется и на отрицательные s.

Точнее, при переходе от оператора T в пространстве с положительным индексом $|s|$ к оператору в сопряженном пространстве с отрицательным индексом s сохраняется разложение $T = T_1 + T_2$, в котором второе слагаемое остается сглаживающим оператором (действующим из $H^s(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s+1}(\mathbb{R}^n)$), а для первого слагаемого сохраняется оценка нормы.

Рассмотрим теперь линейный оператор в частных производных с переменными коэффициентами

$$a(x, D) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha. \tag{1.9.12}$$

Очевидно, что если все $a_\alpha(x)$ — ограниченные измеримые функции, то (1.9.12) — ограниченный оператор из $H^m(\mathbb{R}^n)$ в $H^0(\mathbb{R}^n) = L_2(\mathbb{R}^n)$.

Следствие 1.9.6. *Оператор* (1.9.12) *с коэффициентами, имеющими непрерывные и ограниченные производные любого порядка, действует ограниченным образом из $H^s(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ при любом s.*

Дальнейшую информацию о мультипликаторах можно найти в [34] и [319].

1.10. Следы на гиперплоскости. Рассмотрим теперь вопрос о возможности рассматривать след функции из $H^s(\mathbb{R}^n)$ на гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1}$, определяемой для простоты равенством $x_n = 0$. Для обычной непрерывной функции ее след на этой гиперплоскости есть просто ее сужение на эту гиперплоскость.

Положим $x = (x', x_n)$. Через F' обозначим преобразование Фурье функций от x' в функции от ξ'. Докажем сначала следующую теорему.

Теорема 1.10.1. *Пусть* $s>1/2$. *Тогда для функций* $u\in\mathcal{D}$ *справедливо неравенство*

$$\|u(x',0)\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\leqslant C\|u(x)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.10.1}$$

где C — *не зависящая от* u *постоянная.*

Доказательство. Представим $(F'u)(\xi',x_n)\big|_{x_n=0}$ в виде

$$(F'u)(\xi',0)=(2\pi)^{-1}\int(Fu)(\xi)\,d\xi_n.$$

Отсюда в силу неравенства Шварца

$$|(F'u)(\xi',0)|^2\leqslant(2\pi)^{-2}\int|(Fu)(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\,d\xi_n\int(1+|\xi|^2)^{-s}\,d\xi_n.$$

Последний интеграл вычисляется подстановкой $\xi_n/(1+|\xi'|^2)^{1/2}=\tau$; с точностью до постоянного множителя он равен $(1+|\xi'|^2)^{-s+1/2}$. Остается разделить на него обе части и проинтегрировать их по ξ'. $\square$

Этот результат позволяет дать следующее определение следа функции u из $H^s(\mathbb{R}^n)$ на $\mathbb{R}^{n-1}$ при $s>1/2$.

Определение. Пусть $\{u_l\}$ — последовательность функций из $\mathcal{D}$, сходящаяся к u в $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s>1/2$. Тогда она фундаментальна, а из (1.10.1) вытекает, что следы этих функций на $\mathbb{R}^{n-1}$ образуют фундаментальную последовательность в $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$. Ввиду полноты этого пространства там есть предел. Более того, из (1.10.1) вытекает, что этот предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности, так как любые две такие последовательности неограниченно сближаются в $H^s(\mathbb{R}^n)$. Этот предел и называется *следом* функции u на $\mathbb{R}^{n-1}$, и он обозначается через $u(x',0)$ или $(\gamma u)(x')$.

Неравенство (1.10.1) переносится на функции из $H^s(\mathbb{R}^n)$ предельным переходом.

Для обычных непрерывных функций из $H^s(\mathbb{R}^n)$ этот след очевидным образом совпадает с обычным следом. В силу (1.10.1) *при* $s>1/2$ *оператор перехода к следу действует ограниченным образом из* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *в* $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Немного дальше мы введем пространства H^s в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$ и в ограниченной области, и там вместо следов будет естественно говорить о граничных значениях функций. Там же будет показано, что оператор перехода к следу имеет ограниченный правый обратный.

Теорема 1.10.1 содержится в статье Л. Н. Слободецкого [160]. Там же показано на примере, что неравенство (1.10.1) теряет силу при $s=1/2$. Мы кратко рассмотрим этот пример.

Пример. Пусть $n=2$ и $u(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)$, где

$$\varphi(y)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{e^{i\eta y}\,d\eta}{(1+\eta^2)^{1/2}[\ln(2+\eta^2)]^q},\tag{1.10.2}$$

$1/2<q<1$. Функция φ имеет преобразование Фурье

$$\frac{1}{(1+\eta^2)^{1/2}[\ln(2+\eta^2)]^q},$$

и оно, как нетрудно проверить, принадлежит $\widehat{H}^{1/2}(\mathbb{R})$. Это следует из сходимости интеграла

$$\int\limits_1^\infty\frac{dt}{(1+t)[\ln(1+t)]^{2q}},$$

проверяемой подстановкой $\ln(1+t)=\tau$. Поэтому функция φ принадлежит $H^{1/2}(\mathbb{R})$ и функция $u(x,y)$ принадлежит $H^{1/2}(\mathbb{R}^2)$. С другой стороны, интеграл (1.10.2) сходится условно при $y\neq 0$, а при $y=0$ расходится. По существу по этой причине (ср. с [160]) $|\varphi(y)|\to\infty$ при $y\to 0$ и

$$\lim_{y\to 0}\int|u(x,y)|^2\,dx=+\infty,$$

так что равномерной оценки интеграла под знаком предела через $\|u\|^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^2)}$ нет и функция $u(x,y)$ не имеет конечного следа в $L_2(\mathbb{R})$ при $y=0$.

Из теоремы 1.10.1 следует, что *если $s>m+1/2$, где m — натуральное число, и $a(D)$ — оператор в частных производных порядка m для простоты с постоянными коэффициентами, то для функций $u\in H^s(\mathbb{R}^n)$ выражение $a(D)u$ имеет след на $\mathbb{R}^{n-1}$, принадлежащий $H^{s-m-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, причем оператор перехода к этому следу ограничен в соответствующих нормах.* В частности, это относится к следам производных по x_n.

1.11. Усреднения и сдвиги. Пусть ω — функция из $\mathcal{D}$. Если $u\in$ $\in H^s(\mathbb{R}^n)$ при некотором s, то, конечно, $u\in\mathcal{S}'$, так что определена свертка $u*\omega$, по крайней мере в смысле обобщенных функций. В [2, пп. 2.2 и 3.2], показано, что $u*\omega$ — бесконечно гладкая функция и

$$\operatorname{supp}(u*\omega)\subset\operatorname{supp}u+\operatorname{supp}\omega.\tag{1.11.1}$$

Теорема 1.11.1. *При* $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $\omega \in \mathcal{D}$

$$F[u*\omega] = F[u]F[\omega]. \tag{1.11.2}$$

Действительно, такое соотношение известно, если $u \in \mathcal{S}'$, см., например, теорему 5.3.1 в [2].

Пусть теперь

$$\omega(x) \geqslant 0, \quad \omega(x) = 1 \quad \text{вблизи } 0, \quad \int \omega(x)\,dx = 1. \tag{1.11.3}$$

Положим при $h > 0$

$$\omega_h(x) = h^{-n}\omega\left(\frac{x}{h}\right). \tag{1.11.4}$$

Это дельтаобразное семейство при $h \to 0$ (см., например, [2, п. 1.8]). Свертку $u * \omega_h$ называют *усреднением* функции (или обобщенной функции) u.

Теорема 1.11.2. *При* $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $h \to 0$

$$u*\omega_h \to u \text{ в } H^s(\mathbb{R}^n). \tag{1.11.5}$$

Доказательство. Как легко проверить, $F[\omega_h](\xi) = F[\omega](h\xi)$, и здесь правая часть — равномерно по h ограниченная функция, равномерно сходящаяся к $F[\omega](0) = 1$ в любом шаре $O_R = O_R(0)$ при $h \to 0$. Поэтому $F[u]F[\omega_h] \to F[u]$ в пространстве $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n)$, что и дает нужный результат. □

Теорема 1.11.3. *При любом $s \in \mathbb{R}$ и любом $t \in \mathbb{R}^n$ сдвиг $v_t(x) = v(x+t)$ функции $v(x)$ из $H^s(\mathbb{R}^n)$ принадлежит этому пространству и стремится в нем к $v(x)$ при $t \to 0$.*

Действительно,

$$\widehat{v}_t(\xi) = e^{i\xi\cdot t}\widehat{v}(\xi). \tag{1.11.6}$$

Квадрат нормы разности в образах Фурье

$$\|v_t - v\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int (1+|\xi|^2)^s |e^{i\xi\cdot t} - 1|^2 |\widehat{v}(\xi)|^2\,d\xi$$

разбивается на интегралы по большому шару $O_R(0)$ и по дополнению к нему. Второй интеграл мал при большом R, а при фиксированном R первый интеграл стремится к 0 при $t \to 0$. □

1.12. Теорема о компактности. Здесь мы докажем теорему типа Кондрашова—Реллиха (ср. с [142] и [290]), которая позднее даст важные следствия для пространств в ограниченных областях и на компактных многообразиях.

Теорема 1.12.1. *Пусть $s<\sigma$ и X — ограниченное множество в $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, причем носители всех элементов из X лежат в фиксированном компакте K пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда X предкомпактно в $H^s(\mathbb{R}^n)$, т. е. каждая последовательность $\{u_l\}$ элементов из X содержит подпоследовательность, сходящуюся в $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Так как каждую функцию u_l можно аппроксимировать в $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ ее усреднением с любой степенью точности, то рассмотрим, не ограничивая общности, последовательность функций $u_l\in\mathcal{D}$. Пусть u_l имеют ограниченные нормы в $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ и носители, лежащие в фиксированном компакте K' (см. соотношение (1.11.1) в предыдущем пункте). Пусть $v_l=F[u_l]$.

Покажем, что в любом фиксированном шаре O_R эти функции равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Для этого возьмем функцию $\varphi\in\mathcal{D}$, равную 1 в окрестности компакта K'. Тогда $u_l(x)=u_l(x)\varphi(x)$ и поэтому

$$v_l(\xi)=(2\pi)^{-n}\int v_l(\eta)\psi(\xi-\eta)\,d\eta,$$

где $\psi=F[\varphi]$. Отсюда в силу неравенства Шварца получаем

$$|v_l(\xi)|^2\leqslant c\|u_l\|^2_{H^\sigma(\mathbb{R}^n)}\int(1+|\eta|^2)^{-\sigma}|\psi(\xi-\eta)|^2d\eta$$

и

$$|v_l(\xi)-v_l(\tilde{\xi})|^2\leqslant c\|u_l\|^2_{H^\sigma(\mathbb{R}^n)}\int(1+|\eta|^2)^{-\sigma}|\psi(\xi-\eta)-\psi(\tilde{\xi}-\eta)|^2d\eta,$$

где c не зависит от ξ и l. Теперь воспользуемся быстрой сходимостью $\psi(\eta)$ к нулю при $\eta\to\infty$ и равномерной непрерывностью этой функции на любом компакте. Из последних неравенств очевидна равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность функций v_l в любом шаре O_R.

Далее,

$$\begin{aligned}\|u_l-u_m\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}\leqslant &\int\limits_{O_R}(1+|\xi|^2)^s|v_l(\xi)-v_m(\xi)|^2+\\ &+2\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus O_R}(1+|\xi|^2)^{s-\sigma}(1+|\xi|^2)^\sigma\left[|v_l(\xi)|^2+|v_m(\xi)|^2\right]d\xi.\end{aligned}$$

Под знаком второго интеграла $(1+|\xi|^2)^{s-\sigma}\leqslant(1+R^2)^{s-\sigma}$. Поэтому при заданном $\varepsilon>0$ мы можем выбрать настолько большое R, что этот интеграл будет меньше $\varepsilon/2$ для всех l, m. Затем, пользуясь известной теоремой Арцела о последовательности равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций в применении к семейству функций $v_l(\xi)$ в шаре $\overline{O}_R$, мы можем выбрать такую последовательность индексов l_k, что первый интеграл при $l=l_k$ и $m=l_{k'}$ станет меньше $\varepsilon/2$ при достаточно больших k и k'.

Отсюда нетрудно вывести, что из последовательности $\{u_l\}$ можно выделить подпоследовательность, фундаментальную в $H^s(\mathbb{R}^n)$. Ввиду полноты $H^s(\mathbb{R}^n)$ она сходится в этом пространстве. □

1.13. Замены координат. Рассмотрим преобразование координат $x=x(y)$. Подробнее:

$$x_j = x_j(y_1, \ldots, y_n) \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{1.13.1}$$

Предположим, что эти функции бесконечно дифференцируемы и равномерно ограничены на $\mathbb{R}^n$ вместе с их производными до любого порядка. Пусть якобиан этого преобразования равномерно ограничен по модулю снизу положительным числом. Тогда обратное преобразование обладает аналогичными свойствами.

Теорема 1.13.1. *Все пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ инвариантны относительно таких преобразований.*

Доказательство. Для $s \geqslant 0$ можно просто записать формулы для производных функции $u(x(y))$ и убедиться, что ее нормы указанного в (1.1.7), (1.7.1) вида фиксированного порядка оцениваются через нормы функции $u(x)$ того же порядка. Для отрицательных s используем двойственность между пространствами $H^s(\mathbb{R}^n)$ и $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. □

Добавим, что если функции (1.13.1) имеют конечную гладкость, например принадлежат $C_b^m(\mathbb{R}^n)$, то инвариантны уже только $H^s(\mathbb{R}^n)$ с $|s| \leqslant m$.

1.14. Дискретные нормы и дискретное представление функций из $H^s(\mathbb{R}^n)$. Во многих книгах и работах используется еще один вид норм в пространствах $H^s(\mathbb{R}^n)$. Например, в [52] они принимаются за исходные нормы в этих пространствах.

Чтобы описать их, введем разбиение единицы в $\mathbb{R}^n_\xi$ следующим образом. Пусть $\psi_0(\xi)$ — финитная бесконечно гладкая функция, равная 1 при $|\xi| \leqslant 1/2$ и 0 при $|\xi| \geqslant 1$. Положим

$$\psi(\xi) = \psi_0(\xi) - \psi_0(2\xi). \tag{1.14.1}$$

Носитель этой функции содержится в множестве $\{\xi : 1/4 \leqslant |\xi| \leqslant 1\}$. Далее, положим

$$\psi_j(\xi) = \psi(\xi/2^j) \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{1.14.2}$$

Тогда

$$\psi_j(\xi) = \psi_0(\xi/2^j) - \psi_0(\xi/2^{j-1}) \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{1.14.3}$$

Носитель этой функции содержится в множестве $\{2^{j-2} \leqslant |\xi| \leqslant 2^j\}$. Заметим также, что

$$\sum_0^m \psi_j(\xi) = \psi_0(\xi/2^m) \to 1 \quad (m \to \infty), \tag{1.14.4}$$

причем в любой ограниченной области сумма слева просто равна 1 с некоторого номера. Поэтому

$$\sum_0^\infty \psi_j(\xi) = 1. \tag{1.14.5}$$

Это равенство справедливо и в пространстве Шварца $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Действительно, если $\chi(\xi)$ — основная функция из $\mathcal{S}$, то разобьем интеграл

$$\int [1 - \psi_0(\xi/2^m)]\chi(\xi)\, d\xi$$

на интеграл по шару $O_R(0)$ большого радиуса R и по дополнению к нему. Второй интеграл мал при большом R ввиду быстрого убывания $|\chi(\xi)|$ на бесконечности и равномерной ограниченности $|1 - \psi_0|$. Первый интеграл при фиксированном R становится равным нулю при достаточно большом m.

Обратное преобразование Фурье каждой функции $\psi_j(\xi)$ обозначим через $\varphi_j(x)$. Эти функции принадлежат $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$. Из (1.14.5) следует, что

$$\sum_0^\infty \varphi_j(x) = \delta(x) \tag{1.14.6}$$

в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Отсюда, в свою очередь, следует первое утверждение в следующем предложении.

Предложение 1.14.1. *Для $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ справедливо равенство*

$$u = \sum_0^\infty \varphi_j * u \tag{1.14.7}$$

в смысле сходимости в этом пространстве.

При любом $s \in \mathbb{R}$ для $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ это же равенство верно в смысле сходимости в $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Второе утверждение тоже проверяется переходом к преобразованию Фурье и разбиением интеграла

$$\int |1-\psi_0(\xi/2^m)|^2|(Fu)(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\,d\xi$$

на интеграл по шару большого радиуса R и по дополнению к нему.

При любом $s\in\mathbb{R}$ положим

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n),\varphi_0} = \Big(\sum_0^\infty 2^{2js}\|\psi_j Fu\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/2}. \tag{1.14.8}$$

Элементарно проверяется, что это норма. Мы ограничимся проверкой неравенства треугольника. Для L_2-норм $\|\cdot\|$ имеем

$$\|\psi_j F(u+v)\|^2 \leqslant \|\psi_j Fu\|^2 + 2\|\psi_j Fu\|\|\psi_j Fv\| + \|\psi_j Fv\|^2,$$

и в силу неравенства Шварца

$$2\sum 2^{2js}\|\psi_j Fu\|\|\psi_j Fv\| \leqslant 2\Big(\sum 2^{2js}\|\psi_j Fu\|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum 2^{2js}\|\psi_j Fv\|^2\Big)^{1/2},$$

так что

$$\Big(\sum 2^{2js}\|\psi_j(Fu+Fv)\|^2\Big)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant \Big(\sum 2^{2js}\|\psi_j Fu\|^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum 2^{2js}\|\psi_j Fv\|^2\Big)^{1/2}.$$

В § 10 подобные проверки мы будем пропускать.

Предложение 1.14.2. *Нормы* (1.14.8) *и* $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ *эквивалентны.*

Это утверждение очевидным образом следует из того обстоятельства, что дробь $2^{js}/|\xi|^s$ на носителе функции ψ_j заключена между положительными постоянными, не зависящими от ξ и j.

С точностью до постоянного множителя правая часть формулы (1.14.8) совпадает с

$$\Big(\sum_0^\infty 2^{2js}\|\varphi_j * u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/2}. \tag{1.14.9}$$

Конечно, можно вводить аналогичные нормы вообще с любой финитной бесконечно гладкой функцией ψ_0, равной единице в окрестности начала координат. Но, как показано в работе [294], произвол в выборе функции ψ_0 на самом деле гораздо больше и этот произвол имеет важные применения. Мы вернемся к этому в § 10.

1.15. Вложение пространств H^s в L_p. Для доказательства теоремы 1.2.4 (со строгим неравенством вместо нестрогого) мы воспользуемся обозначениями, введенными в предыдущем пункте.

Пусть $\chi(\xi)$ — финитная гладкая функция, равная единице на носителе функции $\psi(\xi)$. Тогда функция $\chi_j(\xi) = \chi(\xi/2^j)$ равна единице на носителе функции $\psi_j(\xi) = \psi(\xi/2^j)$. Обратные преобразования Фурье функций $\chi(\xi)$ и $\chi_j(\xi)$ обозначим через $\omega(x)$ и $\omega_j(x)$. Мы имеем

$$\omega_j * \varphi_j * u = \varphi_j * u, \tag{1.15.1}$$

и для любой финитной гладкой функции u

$$u = \sum_0^\infty \omega_j * \varphi_j * u \tag{1.15.2}$$

в смысле обобщенных функций. Но все слагаемые — функции из $\mathcal{S}$, и они, конечно, принадлежат $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Оценим L_r-норму функции ω_j, $r > 1$. Эти функции и ω связаны формулой

$$\omega_j(x) = 2^{jn}\omega(2^j x).$$

Поэтому

$$\|\omega_j\|_{L_r(\mathbb{R}^n)} = \left(\int |\omega_j(x)|^r\,dx\right)^{1/r} = 2^{jn(1-1/r)}\|\omega\|_{L_r(\mathbb{R}^n)}$$

и, значит,

$$\|\omega_j\|_{L_r(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 2^{jn/r'}, \tag{1.15.3}$$

где

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1. \tag{1.15.4}$$

Неравенство Юнга, которое мы получим в п. 13.2, сейчас нужно в следующем случае (меняем местами p и q и полагаем $q = 2$). Если $v \in L_r(\mathbb{R}^n)$ и $w \in L_2(\mathbb{R}^n)$, то $v * w \in L_p(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|v * w\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_2\|v\|_{L_r(\mathbb{R}^n)}\|w\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.15.5}$$

при

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{r'}. \tag{1.15.6}$$

Оно дает нам следующий результат: *если*

$$s = \frac{n}{2} - \frac{n}{p} > 0, \tag{1.15.7}$$

то

$$\|\omega_j * \varphi_j * u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_3 2^{js} \|\varphi_j * u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.15.8}$$

Если же левая часть в (1.15.7) равна $s-\varepsilon$ с положительным ε, то в правую часть последнего неравенства можно вставить множитель $2^{-j\varepsilon}$. Тогда при помощи неравенства Шварца получаем (см. предложение 1.14.2)

$$\sum_0^\infty \|\omega_j * \varphi_j * u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_4 \left(\sum_0^\infty 2^{2js} \|\varphi_j * u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/2} \leqslant C_5 \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

что, конечно, достаточно для сходимости ряда (1.15.2) в $L_p(\mathbb{R}^n)$ и оценки нормы его суммы в $L_p(\mathbb{R}^n)$ через норму функции u в $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Относительно немного более сложного аналогичного доказательства в случае $s = n/2 - n/p$ см. [6] или [52]. См. также наш п. 14.4.

§ 2. Пространства $H^s(M)$ на гладком замкнутом многообразии M

2.1. Гладкое замкнутое многообразие. Напомним, что n-мерное замкнутое многообразие M класса C^∞ — это «достаточно хорошее» топологическое пространство, покрытое координатными окрестностями O. Каждая окрестность O имеет карту — область U в $\mathbb{R}^n$ с гомеоморфным отображением $x = \varkappa(t)$ области U на O. Координаты $t = (t_1, \ldots, t_n)$ в U называются локальными координатами в O. Если координатные окрестности O_1 и O_2 пересекаются, то прообразы их пересечения на картах U_1 и U_2 — открытые множества и связывающее их отображение $\varkappa_1^{-1}\varkappa_2$ — диффеоморфизм класса C_b^∞. Карты образуют атлас многообразия. Замкнутость многообразия означает его компактность (и отсутствие края) — возможность выбрать из любого покрытия многообразия M открытыми множествами (в частности, координатными окрестностями) конечное подпокрытие. Эквивалентное условие: любая последовательность точек на M содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой его точке.

Функция $f(x)$ на M по определению принадлежит $C^\infty(M)$ (или $C^m(M)$, или $C^{m+\theta}(M)$), если все функции $f(\varkappa(t))$ на картах координатных окрестностей принадлежат C^∞ (соответственно C^m или $C^{m+\theta}$). Здесь и дальше $m \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < \theta < 1$.

Для введения норм в этих пространствах используется достаточно мелкое разбиение единицы на M — система функций $\{\varphi_k\}_1^K$ со свойствами

$$\varphi_k \in C^\infty(M), \quad \varphi_k(x) \geqslant 0, \quad \operatorname{supp}\varphi_k \subset O_k, \quad \sum_1^K \varphi_k(x) \equiv 1. \tag{2.1.1}$$

Здесь O_k — координатные окрестности, образующие покрытие многообразия M, и наше разбиение единицы подчинено этому покрытию. Полагаем

$$\|\varphi\|_{C^s(M)} = \max_k \|\varphi_k\varphi\|_{C_b^s(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.1.2}$$

где $s = m$ или $m + \theta$ и нормы в правой части вычисляются в локальных координатах. Функции $\varphi_k\varphi$ рассматриваются при этом как *перенесенные на* $\mathbb{R}^n$ (и продолженные нулем вне их носителей). В $C^\infty(M)$ используется счетный набор норм (2.1.2) с $s = m \in \mathbb{Z}_+$. При разных выборах разбиений единицы, координатных окрестностей и локальных координат в них получаются эквивалентные нормы. Пространства $C^m(M)$ и $C^{m+\vartheta}(M)$ — это пополнения пространства $C^\infty(M)$ по указанным нормам.

Очевидным образом определяется и пространство $C^{m,1}(M)$ с целым неотрицательным m. Оно состоит из функций, локально, в локальных координатах, непрерывно дифференцируемых до порядка m включительно, у которых производные порядка m удовлетворяют условию Липшица, так что производные порядка $m+1$ существуют почти всюду и ограничены.

Пространство $\mathcal{E}'(M)$ обобщенных функций на M определяется как пространство линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{E}(M) = C^\infty(M)$.

Обсудим теперь вопрос об интегрировании по M. Определим *плотность* на M как совокупность таких бесконечно гладких положительных функций $\rho_U(t)$ на картах U, что если координатные окрестности O и O' имеют непустое пересечение, то для точек на картах U и U', соответствующих точкам этого пересечения, выполняется равенство

$$\rho_U(t)\,dt = \rho_{U'}(t')\,dt'. \tag{2.1.3}$$

Это означает, что

$$\rho_U[t(t')] = \rho_{U'}(t')\left|\det \frac{\partial t(t')}{\partial t'}\right|^{-1}, \tag{2.1.4}$$

где $\partial t(t')/\partial t'$ — матрица Якоби. Плотность можно записать так: $dx = \{\rho_U(t)\,dt\}$.

Если многообразие ориентировано, то в (2.1.4) определители можно считать положительными и модули опускаются.

Теперь определим *интеграл* от функции $f(x)$ по M формулой

$$\int_M f(x)\,dx = \sum_1^K \int (f\varphi_k)[\kappa^{(k)}(t)]\rho_{U_k}(t)\,dt. \tag{2.1.5}$$

Здесь использованы разбиение единицы, состоящее из функций φ_k с носителями в координатных окрестностях O_k, локальные координаты в O_k и заданная на M плотность. Но интеграл благодаря (2.1.4) зависит только от выбора плотности. Если, в частности, носитель функции f лежит в координатной окрестности O с картой U и отображением $\kappa: U \to O$, то

$$\int_M f(x)\,dx = \int_U f(\kappa(t))\rho_U(t)\,dt. \tag{2.1.6}$$

Ср. с [18, ч. II, гл. I, § 1] и [56].

Каждую непрерывную функцию $f(x)$ на M можно теперь отождествить с обобщенной функцией f из $\mathcal{E}'(M)$ по формуле

$$\langle f, \varphi\rangle_M = \int_M f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{E}(M). \tag{2.1.7}$$

Скалярное произведение на M определяется формулой

$$(f, g)_M = \int_M f(x)\overline{g(x)}\,dx. \tag{2.1.8}$$

Далее естественно определяется *пространство* $L_2(M)$ как гильбертово пространство, получаемое, например, пополнением пространства $C(M)$ непрерывных функций по соответствующей норме $\|u\|_{0,M} = (u, u)_M^{1/2}$. Можно рассматривать и пространства $L_p(M)$, $1 \leqslant p < \infty$, с нормами

$$\|u\|_{L_p(M)} = \Big(\int_M |u|^p\,dx\Big)^{1/p}. \tag{2.1.9}$$

Пусть на M задана гладкая риманова метрика, определяемая ковариантным метрическим тензором $(g_{i,j})$. Тогда за плотность берут

$dx = \{\sqrt{|\det(g_{i,j}(t))|}\,dt\}$. Для объема многообразия M (площади при $n=2$) получается выражение

$$\int\limits_M dx = \sum_1^K \int \varphi_k[\kappa^{(k)}(t)]\rho_{U_k}(t)\,dt. \tag{2.1.10}$$

Особенно важен случай замкнутой гладкой n-мерной поверхности в $\mathbb{R}^N$. Пусть она локально задается равенствами

$$x_j = x_j(t_1, \ldots, t_n) \quad (j = 1, \ldots, N). \tag{2.1.11}$$

Тогда метрический тензор на M, определяемый евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^N$, имеет вид

$$g_{i,j}(t) = \partial_i x(t) \cdot \partial_j x(t), \tag{2.1.12}$$

где $\partial_j x(t)$ — набор из производных функций (2.1.11) по локальным координатам t_j. Аргументацию см., например, в [21, т. 2, гл. 12, § 4]. Матрица (2.1.12) — положительно определенная, поскольку это матрица Грама, так что ее определитель положителен.

Для сравнения можно вспомнить формулу из курса анализа для площади параметризованного куска двумерной поверхности в трехмерном пространстве:

$$S = \iint \sqrt{EG - F^2}\,dt_1 dt_2. \tag{2.1.13}$$

Здесь $E = \partial_1 x(t) \cdot \partial_1 x(t)$, $F = \partial_1 x(t) \cdot \partial_2 x(t)$ и $G = \partial_2 x(t) \cdot \partial_2 x(t)$.

Замечание. При заданной плотности каждая точка на M имеет окрестность с такими локальными координатами t, что $\rho_U(t) \equiv 1$.

Действительно, пусть O — какая-нибудь координатная окрестность, в которой находится взятая точка, и $\tilde{t}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ — локальные координаты в ней, $\widetilde{U}$ — соответствующая карта. Уменьшив ее, если понадобится, будем считать $\widetilde{U}$ прямым круговым цилиндром с осью, параллельной оси $\tilde{t}_n$. Положим

$$t_1 = \tilde{t}_1,\ \ldots,\ t_{n-1} = \tilde{t}_{n-1},\ t_n = \int\limits_{\tilde{t}_{n,0}}^{\tilde{t}_n} \rho_{\widetilde{U}}(\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_{n-1}, t)\,dt. \tag{2.1.14}$$

Тогда $\partial t/\partial\tilde{t}$ — нижняя треугольная матрица с главной диагональю $(1, \ldots, 1, \rho_{\widetilde{U}}(\tilde{t}))$ и

$$dt = \left|\det(\partial t/\partial\tilde{t})\right| d\tilde{t} = \rho_{\widetilde{U}}(\tilde{t})\,d\tilde{t},$$

так что $\rho_U(t)$ действительно равно 1.

Покрывая многообразие окрестностями с такими локальными координатами и выбирая конечное подпокрытие, получаем *специальный «малый» атлас из карт, согласованных с заданной плотностью так, что все ρ_U тождественно равны* 1. Формула (2.1.5) для интеграла при использовании этих карт принимает вид

$$\int_M f(x)\,dx = \sum_1^K \int (f\varphi_k)[\kappa^{(k)}(t)]\,dt. \tag{2.1.15}$$

2.2. Пространства $H^s(M)$. *Пространство* $H^s(M)$ бесселевых потенциалов на M, $s\in\mathbb{R}$, вводится следующим образом. Пусть $\{O_k\}_1^K$ — покрытие многообразия координатными окрестностями и $\{\psi_k\}_1^K$ — система функций со свойствами

$$\begin{gathered} \psi_k \in C^\infty(M), \quad \psi_k(x) \geqslant 0, \\ \operatorname{supp}\psi_k \subset O_k, \quad \sum \psi_k(x) > 0 \ \text{ на } \ M. \end{gathered} \tag{2.2.1}$$

Для любого $s\in\mathbb{R}$ и любой функции $u\in C^\infty(M)$ полагаем

$$\|u\|_{H^s(M)} = \Big[\sum \|u\psi_k\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}\Big]^{1/2}, \tag{2.2.2}$$

где подразумевается, что функция $u\psi_k$ продолжена с соответствующей карты на $\mathbb{R}^n$ нулем вне носителя этой функции и норма вычислена в $\mathbb{R}^n$. Пространство $H^s(M)$ определяется как пополнение пространства $C^\infty(M)$ по этой норме.

Очевидно, что это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v)_{s,M} = \sum(u\psi_k, v\psi_k)_{s,\mathbb{R}^n}. \tag{2.2.3}$$

Индекс $s=0$ будем опускать.

Разные выборы координатных окрестностей, локальных координат и системы функций ψ_k приводят к эквивалентным нормам. Эта система может быть, в частности, разбиением единицы:

$$\sum \psi_k(x) \equiv 1. \tag{2.2.4}$$

В этом случае обычно будем писать φ_k вместо ψ_k. Другой полезный выбор этой системы — с условием

$$\sum \psi_k^2(x) \equiv 1. \tag{2.2.5}$$

В последнем случае, если пользоваться малым атласом из карт, согласованных с заданной плотностью, мы получаем

$$(u, v)_M = \int\limits_M u\bar{v}\,dx, \tag{2.2.6}$$

и тогда $H^0(M)$ изометрически совпадает с $L_2(M)$.

Положим

$$H^\infty(M) = \bigcap H^s(M), \quad H^{-\infty}(M) = \bigcup H^s(M). \tag{2.2.7}$$

Замечание. На стандартном торе $\mathbb{T}^n = [0, 2\pi]^n$ есть другой удобный способ определения норм в пространствах H^s — фактически благодаря наличию единой системы 2π-периодических координат. Каждую гладкую функцию $u(x)$ можно разложить в ряд Фурье по системе экспонент:

$$u(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha e^{i\alpha\cdot x}, \quad c_\alpha = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} u(y)e^{-i\alpha\cdot y}dy. \tag{2.2.8}$$

Такое разложение формально можно написать и для обобщенных функций u, в этом случае коэффициент Фурье c_α понимается как действие u на основную функцию $(2\pi)^{-n}e^{-i\alpha\cdot y}$. (Ср. с [2, п. 1.7].) Норму в $H^s(\mathbb{R}^n)$ ($s\in\mathbb{R}$) можно определить как

$$\Big(\sum (1+|\alpha|^2)^s |c_\alpha|^2\Big)^{1/2}. \tag{2.2.9}$$

Почему эта норма эквивалентна обычной, мы сумеем объяснить в п. 13.8а.

2.3. Основные свойства пространств $H^s(M)$. Приведем перечень этих свойств. Соответствующие утверждения легко выводятся из наших определений и из аналогичных утверждений для $\mathbb{R}^n$, так что пояснения в основном будут опущены или только кратко намечены.

1. Если $u\in H^s(M)$ и φ — функция из $C^\infty(M)$ с носителем, лежащим в координатной окрестности, то перенесение функции φu на $\mathbb{R}^n$ принадлежит $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Аналогичным образом обстоит дело с перенесением функции с карты на многообразие.

2. *При $\sigma > s$ пространство $H^\sigma(M)$ непрерывно вложено в $H^s(M)$. В частности, при $s \geqslant 0$ элементы пространства $H^s(M)$ — квадратично интегрируемые функции.*

3. Теорема 2.3.1. *При $\sigma > s$ оператор вложения $H^\sigma(M) \subset H^s(M)$ компактен.*

Доказательство. Пусть $\{u_l\}$ — ограниченная последовательность в $H^\sigma(M)$. Тогда $\{\varphi_k u_l\}$ — тоже ограниченная последовательность в $H^\sigma(M)$ для любой функции φ_k из разбиения единицы, подчиненного покрытию многообразия координатными окрестностями O_k $(k = 1, \ldots, N)$. Перенося $\varphi_k u_l$ на $\mathbb{R}^n$, получаем при каждом k ограниченную последовательность в $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, причем носители этих функций (обычных или обобщенных) лежат в фиксированном компакте. По теореме 1.12.1 существует подпоследовательность, фундаментальная в пространстве $H^s(\mathbb{R}^n)$. Соответствующие функции на M образуют фундаментальную последовательность в $H^s(M)$. Переходя от $k = 1$ к $k = 2, \ldots, N$, мы можем выбрать настолько редкую подпоследовательность функций u_{l_m}, что последовательность функций $\varphi_k u_{l_m}$ будет фундаментальной в $H^s(M)$ при любом k. Тогда последовательность $\{u_{l_m}\}$ фундаментальна в $H^s(M)$. Ввиду полноты этого пространства она в нем сходится. □

4. *Пространство $C^\infty(M)$ плотно во всех $H^s(M)$. Пространство $C^m(M)$ плотно в $H^s(M)$ при $s \leqslant m$. Пространство $H^\sigma(M)$ плотно в $H^s(M)$ при $\sigma > s$.*

5. Теорема 2.3.2. *При $s \geqslant n/2 + \theta$, $0 < \theta < 1$, любая функция из $H^s(M)$ непрерывна после, возможно, изменения на множестве нулевой меры и локально удовлетворяет условию Гёльдера порядка ϑ в локальных координатах, если $0 < \vartheta < \theta$. При этом пространство $H^s(M)$ непрерывно и компактно вложено в пространство $C^\vartheta(M)$:*

$$\|u\|_{C^\vartheta(M)} \leqslant C\|u\|_{H^s(M)}. \tag{2.3.1}$$

Более полное утверждение.

Теорема 2.3.3. *При $s > n/2 + t$, где $t > 0$, пространство $H^s(M)$ непрерывно и компактно вложено в $C^t(M)$. При $s = n/2 + t$ это также верно, если t — нецелое число.*

В частности, любая функция из $H^\infty(M)$ является бесконечно гладкой после, возможно, исправления на множестве нулевой меры. И наоборот, все бесконечно гладкие функции на M содержатся в $H^\infty(M)$. Таким образом, $H^\infty(M)$ по запасу функций совпадает с $C^\infty(M)$.

Поясним, как получается компактность. Пусть $s > s' > n/2 + t$. По теореме 2.3.1 пространство $H^s(M)$ компактно вложено в $H^{s'}(M)$, а в отношении пространства $H^{s'}(M)$ имеем непрерывность его вложения в $C^t(M)$, используя такой результат для $\mathbb{R}^n$. Композиция компактного и непрерывного отображений компактна.

Теорема 2.3.4. *При $n/2 > s$ и*
$$s \geqslant \frac{n}{2} - \frac{n}{p}, \quad 2 < p < \infty, \tag{2.3.2}$$
пространство $H^s(M)$ непрерывно вложено в пространство $L_p(M)$ с нормой (2.1.9). *При строгом неравенстве для s в* (2.3.2) *вложение компактно.*

6. *Пространство $H^{-m}(M)$ с натуральным m состоит из таких обобщенных функций из $\mathcal{E}'(M)$, что локально, в локальных координатах, они являются линейными комбинациями производных в смысле обобщенных функций до порядка m включительно от функций из $L_2(M)$.*

Локальность понимается в том смысле, что если $u \in H^{-m}(M)$, а φ — функция из $C^\infty(M)$ с носителем в координатной окрестности, то перенесение φu на $\mathbb{R}^n$ имеет указанную структуру.

В частности, видно, что $H^{-\infty}(M)$ совпадает с $\mathcal{E}'(M)$.

7. Теорема 2.3.5. *Пространство линейных непрерывных функционалов над $H^s(M)$ можно отождествить*: 1) *с $H^s(M)$, используя форму $(u,v)_{s,M}$*; 2) *с $H^{-s}(M)$, используя форму $(u,v)_M$, продолженную на $H^s(M) \times H^{-s}(M)$.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы очевидно; проверим второе. Будет удобно пользоваться локальными координатами, согласованными с заданной на M плотностью. Пусть система функций ψ_k подчинена условиям (2.2.1) и (2.2.5). Тогда по формуле (2.2.3) имеем
$$(u,v)_M = \sum (\psi_k u, \psi_k v)_{0,\mathbb{R}^n}.$$
Из обобщенного неравенства Шварца в $\mathbb{R}^n$ выводится *обобщенное неравенство Шварца на M*:
$$|(u,v)_M| \leqslant C\|u\|_{H^s(M)}\|v\|_{H^{-s}(M)}, \tag{2.3.3}$$
где постоянная C не зависит от u и v. В силу этого неравенства форма $(u,v)_M$ продолжается до ограниченной формы на $H^s(M) \times H^{-s}(M)$. Любой элемент $v \in H^{-s}(M)$ определяет линейный непрерывный функционал $(u,v)_M$ на $H^s(M)$. Остается проверить, что это общий вид такого функционала.

Пусть $\{\varphi_k\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию многообразия координатными окрестностями O_k, и $\{\psi_k\}$ — другая система бесконечно гладких функций на M с носителями в O_k, такая, что $\psi_k = 1$ в окрестности носителя функции φ_k. Пусть $f(u)$ — линейный непрерывный функционал над $H^s(M)$. Тогда

$$f(u) = \sum f(\varphi_k u) = \sum f(\psi_k \varphi_k u),$$

и здесь $f(\varphi_k u)$ можно рассматривать как линейные непрерывные функционалы над $H^s(\mathbb{R}^n)$. Поэтому найдутся такие $v_k \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, что

$$\begin{aligned} f(\psi_k \varphi_k u) = (\psi_k \varphi_k u, v_k)_{\mathbb{R}^n} = (\varphi_k u, \psi_k v_k)_{\mathbb{R}^n} = \\ = (\varphi_k u, \psi_k v_k)_M = (u, \varphi_k v_k)_M. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$f(u) = (u, v)_M,$$

где $v = \sum \varphi_k v_k \in H^{-s}(M)$. □

Замечание. Эту теорему было бы легче доказать, имея изометрические изоморфизмы $\Lambda^t \colon H^s(M) \to H^{s-t}(M)$. Но пока их у нас нет, они строятся в рамках теории эллиптических псевдодифференциальных операторов.

8. Теорема 2.3.6. *Пусть m — целое неотрицательное число. Оператор умножения на функцию из $C^{m,1}(M)$ ограничен в $H^{m+1}(M)$. Если $s = m + \theta$, где $0 < \theta < 1$, то в $H^s(M)$ ограничен оператор умножения на функцию из $C^{m+\vartheta}(M)$ при $\theta < \vartheta < 1$. Оператор умножения на функцию $a(x)$ в $H^s(M)$ с отрицательным s определяется как сопряженный к оператору умножения на $\overline{a(x)}$ в $H^{|s|}(M)$ относительно формы $(u, v)_M$ и ограничен, если последний оператор ограничен в $H^{|s|}(M)$.*

9. *При $0 < s < \sigma$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое C_ε, что для функций из $H^\sigma(M)$*

$$\|u\|_{H^s(M)} \leqslant \varepsilon \|u\|_{H^\sigma(M)} + C_\varepsilon \|u\|_{H^0(M)}. \tag{2.3.4}$$

10. Пусть $n > 1$ и Γ — $(n-1)$-мерное бесконечно гладкое замкнутое подмногообразие на M. Это означает, что любая его точка содержится в координатной окрестности O на M, в которой Γ определяется уравнением $t_n = 0$ в некоторых локальных координатах; при этом $t' = (t_1, \ldots, t_{n-1})$ — локальные координаты в $O' = O \cap \Gamma$.

Теорема 2.3.7. *При $s>1/2$ для функций из $H^s(M)$ определен оператор перехода к их следам на Γ, действующий ограниченным образом из этого пространства в $H^{s-1/2}(\Gamma)$.*

Этот оператор определяется, как в п. 1.10. Сначала проверяется неравенство

$$\|v\|_{H^{s-1/2}(\Gamma)} \leqslant C\|u\|_{H^s(M)} \tag{2.3.5}$$

для обычных следов v на Γ (сужений на Γ) бесконечно гладких функций $u(x)$ на M с не зависящей от u постоянной C; это делается с использованием подходящего разбиения единицы на M при помощи теоремы 1.10.1. Если теперь функцию u из $H^s(M)$ аппроксимировать последовательностью функций u_k из $C^\infty(M)$, сходящейся к u в $H^s(M)$, то получается, что их следы на Γ сходятся в $H^{s-1/2}(\Gamma)$ к функции v, не зависящей от выбора этой последовательности; это и есть след функции u на Γ. Для него сохраняется неравенство (2.3.5).

Оператор перехода к следу имеет ограниченный правый обратный. Это получится из теоремы 3.3.1.

2.4. Многообразия конечной гладкости. Если координатные диффеоморфизмы имеют конечную гладкость — принадлежат, скажем, C_b^m, то пространства $H^s(M)$ инвариантно определяются только при $|s|\leqslant m$.

§ 3. Пространства $H^s(\mathbb{R}^n_+)$

3.1. Определения. Через $\mathbb{R}^n_+$ и $\mathbb{R}^n_-$ будем обозначать полупространства точек $x=(x',x_n)$ в $\mathbb{R}^n$ с $x_n>0$ и соответственно $x_n<0$. Их замыкания обозначим через $\overline{\mathbb{R}^n_\pm}$.

Пространства $C_b^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, $C_b^m(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, $C_b^{m+\theta}(\overline{\mathbb{R}^n_+})=C_b^{m,\theta}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ и $C_b^{m,1}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, где m — целое неотрицательное число и $0<\theta<1$, и нормы в них вводятся так же, как в п. 1.2, только точки x и y берутся из $\overline{\mathbb{R}^n_+}$. Линеал $C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ лежит в $C_b^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ и состоит из бесконечно гладких функций с компактными носителями, лежащими внутри $\mathbb{R}^n_+$.

Стандартное скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^n_+)$ имеет вид

$$(u,v)_{\mathbb{R}^n_+} = \int_{\mathbb{R}^n_+} u(x)\overline{v(x)}\,dx, \tag{3.1.1}$$

и соответствующая форма

$$\langle u, v\rangle_{\mathbb{R}^n_+} = (u, \bar{v})_{\mathbb{R}^n_+} \tag{3.1.2}$$

используется для определения обобщенных функций на $\mathbb{R}^n_+$.

Определение 1. Пусть s — любое вещественное число. Функция (или обобщенная функция) $u(x)$ принадлежит пространству $H^s(\mathbb{R}^n_+)$, если она является сужением на $\mathbb{R}^n_+$ функции (при $s<0$ обобщенной функции) $w(x)$ из $H^s(\mathbb{R}^n)$. При этом норма $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n_+)}$ определяется как нижняя грань норм $\|w\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ тех $w \in H^s(\mathbb{R}^n)$, для которых их сужения на $\mathbb{R}^n_+$ совпадают с $u(x)$.

При неотрицательном s возможны два других определения.

Определение 2. Пусть s неотрицательно. Пространство $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ состоит из таких квадратично интегрируемых функций $u(x)$, что их производные $D^\alpha u(x)$ в смысле обобщенных функций в $\mathbb{R}^n_+$ порядка $|\alpha| \leqslant s$ тоже квадратично интегрируемы и при этом конечна норма, определяемая при целом $s=m$ формулой

$$\|u\|'^2_{H^m(\mathbb{R}^n_+)} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |D^\alpha u(x)|^2\,dx \tag{3.1.3}$$

и при нецелом $s=m+\theta$, $0<\theta<1$, формулой

$$\|u\|'^2_{H^{m+\theta}(\mathbb{R}^n_+)} = \|u\|'^2_{H^m(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{|\alpha|=m} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\,dx\,dy. \tag{3.1.4}$$

Определение 3. Пусть s неотрицательно. Пространство $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ определяется как пополнение пространства $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ по норме (3.1.3) при целом $s=m$ и (3.1.4) при нецелом $s=m+\theta$, $0<\theta<1$.

Аналогичные определения даются для пространств $H^s(\mathbb{R}^n_-)$.

Теорема 3.1.1. *Определения* 1—3 *при* $s \geqslant 0$ *эквивалентны.*

Доказательство состоит из нескольких пунктов. Подробно мы рассмотрим случай целочисленных (т. е. натуральных) s. В случае дробных s или проходят те же рассуждения, или требуются дополнительные технические рассмотрения; их мы только наметим. Отметим, что к определению пространств с дробными s имеется еще один подход, связанный с использованием средств теории интерполяции; он будет упомянут в п. 13.4.

Мы сначала проверим эквивалентность близких определений — второго и третьего. Затем проверим эквивалентность им первого определения.

Для удобства временно обозначим через $H^s_k(\mathbb{R}^n_+)$ пространство $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ в смысле определения k, $\mathrm{k}=1,2,3$. Эти обозначения используются только в данном доказательстве, в дальнейшем нижний индекс будет иметь совсем другой смысл.

1°. $H^s_3(\mathbb{R}^n_+)\subset H^s_2(\mathbb{R}^n_+)$ *с совпадением норм.*

Действительно, если u есть предел по норме (3.1.3) или (3.1.4) последовательности функций $u_k\in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, то элементарно проверяется, что производная $D^\alpha u(x)$ в смысле обобщенных функций в $\mathbb{R}^n_+$ при $|\alpha|\leqslant s$ есть предел последовательности $D^\alpha u_k(x)$ в $L_2(\mathbb{R}^n_+)$ (точнее, в $H_3^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n_+)$). Поэтому $D^\alpha u\in L_2(\mathbb{R}^n)$ и $H^s_3(\mathbb{R}^n_+)\subset H^s_2(\mathbb{R}^n_+)$ с совпадением норм для элементов первого из этих двух пространств.

2°. $H^s_2(\mathbb{R}^n_+)\subset H^s_3(\mathbb{R}^n_+)$ *с совпадением норм.*

Предварительно заметим следующее. В пространстве $H^s_2(\mathbb{R}^n_+)$ плотны элементы с компактными носителями, лежащими в $\overline{\mathbb{R}^n_+}$. Действительно, в нем возможно умножение на функции из $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, так как производные от произведений на такие функции вычисляются по правилу Лейбница. Пусть $\theta(x)$ — какая-нибудь бесконечно гладкая неотрицательная функция на $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, равная 1 при $|x|\leqslant 1$ и 0 при $|x|\geqslant 2$, значения которой заключены между 0 и 1. Для $R>0$ положим $\theta_R(x)=\theta(x/R)$. Если u принадлежит $H^s_2(\mathbb{R}^n_+)$, то $\theta_R u$ тоже принадлежит $H^s_2(\mathbb{R}^n_+)$ и, как показывает несложное вычисление, стремится в этом пространстве к u при $R\to\infty$.

Пусть теперь $u\in H^s_2(\mathbb{R}^n_+)$ — функция с компактным носителем в $\overline{\mathbb{R}^n_+}$. Мы построим последовательность функций из $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, сходящуюся к u в этом пространстве. Сделаем это в несколько шагов. Сначала продолжим эту функцию нулем при $x_n<0$ и положим

$$u_h(x)=u(x',x_n+h)\quad (h>0).$$

Для сужений этих функций на $\mathbb{R}^n_+$ мы имеем, как нетрудно проверить,

$$D^\alpha u_h(x)=(D^\alpha u)(x',x_n+h),$$

поэтому они тоже принадлежат $H^s_2(\mathbb{R}^n_+)$. Далее, они стремятся к $u(x)$ в этом пространстве при $h\to 0$. Это следует из непрерывности в среднем функций в $L_2(\mathbb{R}^n_+)$.

Пусть $\psi(x_n)$ — бесконечно гладкая функция, равная 0 при $x_n<$ $<-2/3$ и 1 при $x_n>-1/3$. Положим

$$v_h(x)=\psi(x_n/h)u_h(x).$$

Как легко проверить, эти функции принадлежат $H^s(\mathbb{R}^n)$, а их сужения на $\mathbb{R}^n_+$ совпадают с сужениями функций $u_h(x)$, поэтому $v_h\big|_{\mathbb{R}^n_+} \to u$ при $h \to 0$ в $H^s_2(\mathbb{R}^n_+)$.

Теперь аппроксимируем $v_h(x)$ усреднением (см. п. 1.11)

$$w_h(x) = v_h(x) * \omega_{h/2}(x).$$

Сужение этой функции на $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ — бесконечно гладкая функция, стремящаяся к $u(x)$ при $h \to 0$ в $H^s_2(\mathbb{R}^n_+)$. В качестве искомой последовательности можем взять $w_{1/l}(x)\big|_{\mathbb{R}^n_+}$.

3°. *$H^s_1(\mathbb{R}^n_+)$ непрерывно вложено в $H^s_3(\mathbb{R}^n_+)$.*

Пусть u — сужение на $\mathbb{R}^n_+$ функции w из $H^s(\mathbb{R}^n)$. Последнюю можно аппроксимировать в $H^s(\mathbb{R}^n)$ финитными бесконечно гладкими функциями w_k по норме (1.1.7) или (1.7.1) соответственно при целом и нецелом s. Тогда сужения u_k этих функций на $\mathbb{R}^n_+$ образуют фундаментальную последовательность в $H^s_1(\mathbb{R}^n_+)$. Она сходится к u по норме (3.1.3) или (3.1.4). Поэтому функция u из пространства $H^s_1(\mathbb{R}^n_+)$ принадлежит $H^s_3(\mathbb{R}^n_+)$. При этом

$$\|u\|'_{H^s(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant \|w\|'_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Переходя здесь к нижней грани справа по выбору w с $w|_{\mathbb{R}^n_+} = u$ и используя эквивалентность норм $\|w\|_s$ и $\|w\|'_s$ в $\mathbb{R}^n$, получаем, что

$$\|u\|'_{H^s(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Этим показано, что $H^s_1(\mathbb{R}^n_+)$ непрерывно вложено в $H^s_3(\mathbb{R}^n)$.

4°. *Пространство $H^s_3(\mathbb{R}^n_+)$ непрерывно вложено в $H^s_1(\mathbb{R}^n_+)$.*

Чтобы доказать это, нужна следующая теорема.

Теорема 3.1.2. *Для любого натурального N существует линейный оператор $\mathcal{E}_N u = w$, при $0 \leqslant s \leqslant N$ действующий ограниченным образом из пространства $H^s_3(\mathbb{R}^n_+)$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$ и переводящий любую функцию u из первого пространства в такую функцию w из второго пространства, что ее сужение на $\mathbb{R}^n_+$ совпадает с u.*

Этот *оператор продолжения* будет указан в доказательстве. При помощи этого оператора получается, что функции u из $H^s_3(\mathbb{R}^n_+)$ принадлежат $H^s_1(\mathbb{R}^n_+)$ и справедливо неравенство

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\|u\|'_{H^s(\mathbb{R}^n_+)}$$

с не зависящей от u постоянной C, так как левая часть здесь не превосходит нормы $\|w\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ любого продолжения, в том числе продолжения из теоремы 3.1.2, а последняя оценивается через $\|w\|'_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ и, значит, через $\|u\|'_{H^s(\mathbb{R}^n_+)}$.

Этим завершается доказательство теоремы 3.1.1. □

Доказательство теоремы 3.1.2. Наиболее просто оно проводится с использованием следующего оператора, предложенного Хестенсом [244] для гладкого продолжения гладких функций (см. также [116]):

$$w(x', x_n) = (\mathcal{E}_N u)(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n) & \text{при } x_n > 0, \\ \sum\limits_1^N \lambda_\nu u\Big(x', -\dfrac{1}{\nu} x_n\Big) & \text{при } x_n < 0, \end{cases} \tag{3.1.5}$$

где числа λ_ν определяются системой уравнений

$$\sum_1^N \Big(-\frac{1}{\nu}\Big)^j \lambda_\nu = 1 \quad (j = 0, \ldots, N-1). \tag{3.1.6}$$

Проверим, что это оператор с нужными свойствами. Рассмотрим сначала случай целого неотрицательного $s = m \leqslant N$.

Если $u \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, то легко проверяется, что после продолжения получается функция, принадлежащая $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_-})$ с одинаковыми односторонними производными при $x_n = 0$ до порядка $m-1$ включительно. Несложно проверяется, что такая функция $w(x)$ принадлежит $H^m(\mathbb{R}^n)$ и что при этом выполнено неравенство

$$\|w\|'_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|'_{H^m(\mathbb{R}^n_+)} \tag{3.1.7}$$

с не зависящей от u постоянной C.

Если теперь $\{u_j\}$ — последовательность функций из $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, сходящаяся к данной функции u по норме $\|\cdot\|'_{m,\mathbb{R}^n_+}$, то соответствующая последовательность $\{w_j\}$ сходится к некоторой функции $w \in H^m(\mathbb{R}^n)$, и нетрудно проверить, что формулы (3.1.5) сохраняются для u и w.

Теперь рассмотрим случай $0 < s < 1$ и $N = 1$. В этом случае функция w — четная по x_n. Надо оценить три интеграла от выражения

$$\frac{|w(x) - w(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}$$

по $\mathbb{R}^n_- \times \mathbb{R}^n_-$, $\mathbb{R}^n_- \times \mathbb{R}^n_+$, $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_-$ через аналогичный интеграл по $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$. С первым интегралом нет проблем. Второй заменой x_n на

$-x_n$ приводится к интегралу

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{[(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_{n-1}-y_{n-1})^2+(x_n+y_n)^2]^{n/2+s}}\,dx\,dy.$$

Если в знаменателе заменить y_n на $-y_n$, то он уменьшается и интеграл увеличивается. Это и дает для него нужную оценку. Третий из упомянутых выше интегралов оценивается аналогично.

Этим мы ограничимся. Общий случай дробного s рассмотрен в [160] (в довольно сложных обозначениях — для анизотропных пространств, т. е. пространств с разными индексами гладкости по разным переменным). □

Замечания об операторе продолжения.

1. Числа $1/\nu$ можно заменить любыми попарно разными положительными числами.

2. Сумму в (3.1.5) можно умножить на любую функцию $\psi(x_n)$ из $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_-})$, равную 1 вблизи начала.

3. Рассмотренный оператор продолжения $\mathcal{E}_N$ при фиксированном N обслуживает конечный промежуток значений s: $0\leqslant s\leqslant N$. При увеличении s приходится менять оператор — увеличивать N. Существуют другие операторы продолжения, в частности, построенный Сили оператор, не зависящий от $s\geqslant 0$ [306], см. наш п. 18.1. Единый оператор продолжения удастся построить и для отрицательных s, для существенно более общих пространств и для существенно более общих — липшицевых областей. Такой оператор предложен, как мы уже упоминали, В. С. Рычковым [294], см. ниже наш § 10. В частности, справедлив следующий результат при определении 1. Доказательство будет приведено в § 10.

Теорема 3.1.3. *Существует универсальный оператор продолжения $\mathcal{E}$, действующий ограниченным образом из $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$ при всех вещественных s, такой, что $\mathcal{E}u\big|_{\mathbb{R}^n_+}=u$.*

3.2. Свойства пространств $H^s(\mathbb{R}^n_+)$. Свойства, которые мы сейчас сформулируем, очевидны из определений или легко выводятся из соответствующих свойств пространств $H^s(\mathbb{R}^n)$ при помощи продолжений и сужений.

1. *Пространство $H^0(\mathbb{R}^n_+)$ совпадает с $L_2(\mathbb{R}^n_+)$. При $\sigma>s$ пространство $H^\sigma(\mathbb{R}^n_+)$ непрерывно вложено в $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ и является плотным в $H^s(\mathbb{R}^n_+)$.*

2. Теорема 3.2.1. *При $s > n/2 + t$, где $t > 0$, пространство $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ непрерывно вложено в пространство $C^t_b(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. При $s = n/2 + t$ это также верно, если t — нецелое число.*

Теорема 3.2.2. *При $n/2 > s$ и*

$$s \geqslant \frac{n}{2} - \frac{n}{p}, \quad 2 < p < \infty, \tag{3.2.1}$$

пространство $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ непрерывно вложено в пространство $L_p(\mathbb{R}^n_+)$ с нормой

$$\|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^p \, dx \Big)^{1/p}. \tag{3.2.2}$$

3. *При натуральном m пространство $H^{-m}(\mathbb{R}^n_+)$ состоит из линейных комбинаций производных порядка m в смысле обобщенных функций в $\mathbb{R}^n_+$ от функций из $L_2(\mathbb{R}^n_+)$.*

4. Теорема 3.2.3. *Пусть m — целое неотрицательное число. Оператор умножения на функцию $a(x)$ ограничен в $H^s(\mathbb{R}^n_+)$, если $s = m + 1$ и $a \in C^{m,1}_b(\mathbb{R}^n_+)$, а также если $s = m + \theta$, $0 < \theta < 1$ и $a \in C^{m+\vartheta}_b(\mathbb{R}^n_+)$, где $\vartheta \in (\theta, 1)$. Кроме того, на случай полупространства переносится оценка вида* (1.9.1).

5. *При $0 < s < \sigma$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $C_\varepsilon > 0$, что для функций из $H^\sigma(\mathbb{R}^n_+)$ выполняется неравенство*

$$\|u\|_{s,\mathbb{R}^n_+} \leqslant \varepsilon \|u\|_{\sigma,\mathbb{R}^n_+} + C_\varepsilon \|u\|_{0,\mathbb{R}^n_+}. \tag{3.2.3}$$

6. Теорема 3.2.4. *При $s > 1/2$ функции $u(x)$ из $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ имеют граничные значения $(\gamma^+ u)(x') = u(x', 0)$ на границе $\mathbb{R}^{n-1}$ полупространства $\mathbb{R}^n_+$, принадлежащие $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, при этом оператор перехода к граничному значению действует ограниченным образом из $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ в $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.*

Граничное значение определяется аналогично следу в случае $\mathbb{R}^n$. Часто граничное значение тоже называют следом.

В теории уравнений в частных производных есть возможности преодоления барьера $s = 1/2$. См. вариационную задачу Неймана в § 8.

7. *Все пространства $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ с $s \geqslant 0$ являются гильбертовыми.* Скалярные произведения, отвечающие нормам (3.1.3) и (3.1.4), легко выписываются. *Пространство, сопряженное к $H^s(\mathbb{R}^n_+)$, $s \geqslant 0$, можно поэтому отождествить с этим пространством.*

Второй способ реализации пространства, сопряженного к $H^s(\mathbb{R}^n_+)$, с использованием продолжения скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^n_+)$, тоже есть, но для его объяснения потребуется введение новых пространств (в § 4).

3.3. Граничные значения. К теореме 3.2.4 мы добавим следующее важное утверждение о правом обратном операторе к оператору перехода к следу.

Теорема 3.3.1. *Существует не зависящий от s линейный оператор, действующий при $s \geqslant 1/2$ ограниченным образом из $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ в $H^s(\mathbb{R}^n_+)$, который при $s > 1/2$ переводит любую функцию $v(x')$ из первого пространства в такую функцию $u(x)$ из второго пространства, что ее граничное значение $(\gamma^+ u)(x')$ совпадает с $v(x')$.*

Аналогично, существует не зависящий от s линейный оператор, действующий при $s \geqslant 1/2$ ограниченным образом из $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$, который при $s > 1/2$ переводит любую функцию $v(x')$ из первого пространства в такую функцию $u(x)$ из второго пространства, что ее след $(\gamma u)(x')$ при $x_n = 0$ совпадает с $v(x')$.

Соответствующий оператор строится явно. Следует обратить внимание на то, что он ограничен и при $s = 1/2$, что невозможно в теореме 3.2.4.

Доказательство достаточно провести для второго утверждения теоремы. Запишем условие ограниченности:

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_s \|v\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{3.3.1}$$

Положим

$$\xi = (\xi', \xi_n), \quad \sqrt{1 + |\xi'|^2} = \langle \xi' \rangle. \tag{3.3.2}$$

Пусть $s = m + \theta$, $0 \leqslant \theta < 1$. Заметим, что если $u(x)$ — функция из $H^s(\mathbb{R}^n)$, то ее норма в этом пространстве эквивалентна квадратному корню из выражения

$$\iint |(F'u)(\xi', x_n)|^2 \langle \xi' \rangle^{2s}\, dx_n\, d\xi' + \iint |D_n^m (F'u)(\xi', x_n)|^2 \langle \xi' \rangle^{2\theta}\, dx_n\, d\xi' + \\ + \iiint \frac{|(F' D_n^m u)(\xi', x_n) - (F' D_n^m u)(\xi', y_n)|^2}{|x_n - y_n|^{1+2\theta}}\, dx_n\, dy_n\, d\xi', \tag{3.3.3}$$

где F' — преобразование Фурье по x' и $D_n = -i\partial/\partial x_n$. Второе слагаемое опускается при $m = 0$, а третье — при $\theta = 0$.

Пусть $f(t)$ — функция из $H^\infty(\mathbb{R})$, равная 1 в начале координат, например

$$f(t) = \frac{1}{1+|t|^2}. \tag{3.3.4}$$

Положим (следуя работе [160])

$$u(x) = F'^{-1}\bigl[(F'v)(\xi')f(x_n\langle\xi'\rangle)\bigr]. \tag{3.3.5}$$

Ясно, что если, скажем, $v(x')$ — гладкая финитная функция, то $u(x',0)=v(x')$. Мы проверим, что для этой функции конечна величина (3.3.3) и что она оценивается через квадрат нормы функции v в $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Первое слагаемое в (3.3.3) после подстановки в него функции (3.3.5) имеет вид

$$\iint |(F'v)(\xi')|^2\langle\xi'\rangle^{2s}|f(x_n\langle\xi'\rangle)|^2\,dx_n\,d\xi'.$$

Сделав здесь замену $x_n\langle\xi'\rangle=t$, получим, что оно равно

$$\int |(F'v)(\xi')|^2\langle\xi'\rangle^{2s-1}\,d\xi'\int|f(t)|^2\,dt = C_1\|v\|^2_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Аналогично для второго слагаемого в (3.3.3)

$$\iint |(F'v)(\xi')|^2|D_n^m f(x_n\langle\xi'\rangle)|^2\langle\xi'\rangle^{2\theta}\,dx_n\,d\xi'$$

получим, что оно равно

$$\int |(F'v)(\xi')|^2\langle\xi'\rangle^{2s-1}\,d\xi'\int|f^{(m)}(t)|^2\,dt = C_2\|v\|^2_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Третье слагаемое имеет вид

$$\iiint |(F'v)(\xi')|^2\frac{|D_n^m f(x_n\langle\xi'\rangle)-D_n^m f(y_n\langle\xi'\rangle)|^2}{|x_n-y_n|^{1+2\theta}}\,dx_n\,dy_n\,d\xi'.$$

Заменив здесь $x_n\langle\xi'\rangle$ на t и $y_n\langle\xi'\rangle$ на τ, получим, что оно равно

$$\int |(F'v)(\xi')|^2\langle\xi'\rangle^{2s-1}\,d\xi'\iint\frac{|f^{(m)}(t)-f^{(m)}(\tau)|^2}{|t-\tau|^{1+2\theta}}dt\,d\tau = C_3\|v\|^2_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Этим желаемый результат доказан. □

Более общие утверждения состоят в следующем. Приводим их для $\mathbb{R}^n_+$. Первое из них непосредственно следует из теоремы 3.2.4.

Теорема 3.3.2. *Пусть $l+1/2<s$, где l — целое неотрицательное число. Тогда любая функция $u(x)$ из $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ имеет граничные*

значения $D_n^j u(x',0)$ *на гиперплоскости* $x_n=0$, *принадлежащие пространствам* $H^{s-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ $(j=0,\ldots,l)$. *При этом оператор перехода к набору этих граничных значений*

$$u(x',0),\ldots,D_n^l u(x',0) \tag{3.3.6}$$

действует ограниченным образом из $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ *в прямое произведение пространств* $H^{s-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ $(j=0,\ldots,l)$.

Эти граничные значения называются *данными Коши* порядка l функции u на границе полупространства.

Теорема 3.3.3. *Для любого натурального* l *существует не зависящий от* s *линейный оператор, при* $s\geqslant l+1/2$ *действующий ограниченным образом из прямого произведения пространств* $H^{s-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ $(j=0,\ldots,l)$ *в пространство* $H^s(\mathbb{R}^n_+)$, *такой, что при* $s>l+1/2$ *образ* u *любой вектор-функции* $(v_0,\ldots,v_l)$ *имеет данные Коши* $(v_0,\ldots,v_l)$ *порядка* l.

Доказательство. Достаточно построить такой оператор для случая, когда только одна производная $D_n^k u(x',0)=v_k(x')$, $0\leqslant k\leqslant l$, отлична от нуля, а остальные равны нулю. Приведем более общее утверждение из книги [87]; в полном виде оно в дальнейшем понадобится в п. 4.3.

Введем операторы

$$T_j\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})\to\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad (j=0,1,\ldots) \tag{3.3.7}$$

следующим образом.

Пусть $\theta_j(t)$ — функция из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, равная $t^j/j!$ при $|t|<1$. Положим

$$(T_j\varphi)(x)=F'^{-1}[\langle\xi'\rangle^{-j}(F'\varphi)(\xi')\theta_j(x_n\langle\xi'\rangle)], \tag{3.3.8}$$

где F' — преобразование Фурье по переменным x' $(x'\to\xi')$ и $\langle\xi'\rangle$ определено в (3.3.2).

Лемма 3.3.4. *Операторы* T_j *обладают следующими свойствами.*

1°. *Если* $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$, *то для любого мультииндекса* $\alpha=(\alpha',\alpha_n)$

$$(\partial^\alpha T_j\varphi)(x',0)=\begin{cases}\partial^{\alpha'}\varphi(x') & \text{при } \alpha_n=j,\\ 0 & \text{при } \alpha_n\neq j.\end{cases} \tag{3.3.9}$$

2°. T_j *продолжается до ограниченного линейного оператора*

$$T_j\colon H^{\sigma-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})\to H^\sigma(\mathbb{R}^n) \quad \text{при } \sigma\in\mathbb{R}. \tag{3.3.10}$$

Доказательство леммы сводится к элементарной проверке. Соотношения (3.3.9) получаются дифференцированием под знаком интеграла (определяющего обратное преобразование Фурье). Чтобы проверить (3.3.10), вычислим преобразование Фурье от $T_j\varphi$ (используя подстановку $x_n\langle\xi'\rangle=\tau$):

$$(F(T_j\varphi))(\xi)=\langle\xi'\rangle^{-j-1}(F'\varphi)(\xi')(F_n\theta_j)(\xi_n\langle\xi'\rangle^{-1}),$$

где F_n — преобразование Фурье по x_n ($x_n\to\xi_n$). Теперь при помощи подстановки $\xi_n=\tau\langle\xi'\rangle$ получаем

$$\|T_j\varphi\|^2_{H^\sigma(\mathbb{R}^n)}=C_\sigma\|\varphi\|^2_{H^{\sigma-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

где

$$C_\sigma=\int(1+\tau^2)^\sigma|(F_n\theta_j)(\tau)|^2\,d\tau$$

при любом σ. □

В частности, этим доказана теорема 3.3.3. □

Разумеется, все это верно и для пространств в $\mathbb{R}^n_-$.

Если функция принадлежит $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s>0$, то ее данные Коши порядка меньше $s-1/2$ с двух сторон на гиперплоскости $x_n=0$ одинаковы, так как это следы в смысле п. 1.10.

3.4. Продолжение нулем. В теореме 3.1.2 был указан оператор продолжения функции из $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ до функции из $H^s(\mathbb{R}^n)$, действующий ограниченным образом из первого пространства во второе. В диапазоне значений $s\in[0,1/2)$ вместо него можно использовать *оператор продолжения нулем*, который мы обозначим через $\mathcal{E}_0$:

$$\mathcal{E}_0u(x)=\begin{cases}u(x) & \text{при } x_n>0,\\ 0 & \text{при } x_n<0.\end{cases}\tag{3.4.1}$$

Это будет доказано в следующей теореме. Но мы охватим в ней и промежуток $(1/2,1)$ для s, подготавливая дальнейшие обобщения.

Теорема 3.4.1. 1. *Оператор $\mathcal{E}_0$ действует ограниченным образом из $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$ при $0\leqslant s<1/2$.*

2. *При $1/2<s<1$ этот же оператор действует ограниченным образом из подпространства функций в $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ с $u(x',0)=0$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. При $s=0$ это очевидно, так что пусть $s>0$. Для функции $v=\mathcal{E}_0 u$ имеем

$$\iint \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,dx\,dy =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,dx\,dy + 2\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|u(x)|^2\int\limits_{\mathbb{R}^n_-}\frac{1}{|x-y|^{n+2s}}\,dy\,dx. \quad (3.4.2)$$

Теперь надо оценить второе слагаемое справа через квадрат нормы $\|u\|'_{s,\mathbb{R}^n_+}$. В этом слагаемом $x\in\mathbb{R}^n_+$, $y\in\mathbb{R}^n_-$, так что $|x-y|>0$. При фиксированном x мы вычисляем внутренний интеграл по y при помощи замены $y-x=z$ и перехода от z к сферическим координатам. Получаем, что второе слагаемое не превосходит

$$C_1\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|u(x)|^2}{|x|^{2s}}\,dx$$

с некоторой постоянной C_1, а последний интеграл, в свою очередь, не превосходит

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_0^\infty \frac{|u(x',x_n)|^2}{x_n^{2s}}\,dx_n\,dx'. \quad (3.4.3)$$

Мы сначала получим желаемый результат в одномерном случае.

Теорема 3.4.2. *Пусть $u(t)$ — гладкая функция на луче $\overline{\mathbb{R}}_+$ с компактным носителем. Тогда*:

1. *При $0<s<1/2$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^\infty \frac{|u(t)|^2}{t^{2s}}dt \leqslant C\Big[\int\limits_0^\infty |u(t)|^2dt + \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{|u(t)-u(\tau)|^2}{|t-\tau|^{1+2s}}dt\,d\tau\Big] \quad (3.4.4)$$

с постоянной, не зависящей от u.

2. *При $1/2<s<1$ такое же неравенство справедливо, если $u(0)=0$.*

Доказательство. 1. Докажем первое утверждение теоремы. Это не очень просто.

Заметим, что

$$t^{-s}u(t) = t^{-1-s}\int\limits_t^{2t}[u(t)-u(\tau)]\,d\tau + t^{-1-s}\int\limits_t^{2t}u(\tau)\,d\tau. \quad (3.4.5)$$

Под $\|f\|_{I_h}$ в этом доказательстве будем понимать L_2-норму функции f по интервалу $I_h = (0, h)$. Нашей целью будет вывод нужной оценки для $\|t^{-s}u(t)\|_{I_{1/2}}$ (см. ниже формулу (3.4.10)): получив ее, мы легко закончим доказательство.

В силу соотношения (3.4.5) имеем

$$\|t^{-s}u(t)\|_{I_{1/2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\|t^{-1-s} \int_t^{2t} [u(t) - u(\tau)]\, d\tau\right\|_{I_{1/2}} + \left\|t^{-1-s} \int_t^{2t} u(\tau)\, d\tau\right\|_{I_{1/2}}. \tag{3.4.6}$$

В первом слагаемом справа в (3.4.6) оценим интеграл при помощи неравенства Шварца:

$$\left| \int_t^{2t} [u(t) - u(\tau)]\, d\tau\right| \leqslant t^{1/2}\Big(\int_t^{2t} |u(t) - u(\tau)|^2\, d\tau\Big)^{1/2}.$$

Так как здесь $0 \leqslant \tau - t \leqslant t$, то получаем

$$\left\|t^{-1-s} \int_t^{2t} [u(t) - u(\tau)]\, d\tau\right\|_{I_{1/2}} \leqslant \Big(\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|u(t) - u(\tau)|^2}{|t - \tau|^{1+2s}} dt\, d\tau\Big)^{1/2} \tag{3.4.7}$$

(в правой части мы заменили два интеграла интегралами по $(0, \infty)$).

Второе слагаемое справа в (3.4.6) преобразуем и оценим следующим образом. При фиксированном t заменим в интеграле τ на $t\sigma$; это слагаемое примет вид

$$\left\|t^{-s} \int_1^2 u(t\sigma) d\sigma\right\|_{I_{1/2}},$$

где норма берется по переменному t. Норма интеграла не превосходит интеграла от нормы (это следствие из неравенства треугольника в данном случае для L_2-нормы от римановой интегральной суммы), поэтому последнее выражение не превосходит

$$\int_1^2 \|t^{-s} u(t\sigma)\|_{I_{1/2}} d\sigma.$$

(Это конечная величина, так как $s < 1/2$.) При фиксированном σ норму под знаком интеграла преобразуем заменой $t\sigma$ на θ:

$$\Big(\int_0^{1/2} t^{-2s} |u(t\sigma)|^2 dt\Big)^{1/2} = \sigma^{s-1/2}\Big(\int_0^{\sigma/2} \theta^{-2s} |u(\theta)|^2 d\theta\Big)^{1/2}.$$

Теперь видно, что второе слагаемое справа в (3.4.6) оценивается так:

$$\left\|t^{-1-s}\int\limits_t^{2t} u(\tau)\,d\tau\right\|_{I_{1/2}} \leqslant \int\limits_1^2 \sigma^{s-1/2}d\sigma\|t^{-s}u(t)\|_{I_1} \leqslant$$
$$\leqslant \gamma(s)\|t^{-s}u(t)\|_{I_{1/2}} + \gamma(s)2^s\|u(t)\|_{\mathbb{R}_+}, \qquad (3.4.8)$$

где $\|\cdot\|_{\mathbb{R}_+}$ — L_2-норма по полуоси и (это ключевое неравенство в доказательстве)

$$\gamma(s) = \int\limits_1^2 \sigma^{s-1/2}d\sigma < \int\limits_1^2 d\sigma = 1. \qquad (3.4.9)$$

Из соотношений (3.4.6)—(3.4.9) получаем

$$\|t^{-s}u(t)\|_{I_{1/2}} \leqslant (1-\gamma(s))^{-1}\left(\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{|u(t)-u(\tau)|^2}{|t-\tau|^{1+2s}}dt\,d\tau\right)^{1/2} + C_1\|u\|_{\mathbb{R}_+}. \qquad (3.4.10)$$

Остается учесть, что

$$\|t^{-s}u(t)\|_{\mathbb{R}_+} \leqslant \|t^{-s}u(t)\|_{I_{1/2}} + 2^{-s}\|u(t)\|_{\mathbb{R}_+}.$$

2. Проверим второе утверждение теоремы. Вместо равенства (3.4.5) запишем

$$t^{-s}u(t) = t^{-1-s}\int\limits_0^t [u(t)-u(\tau)]\,d\tau + t^{-1-s}\int\limits_0^t u(\tau)\,d\tau. \qquad (3.4.11)$$

Оба слагаемых в правой части квадратично интегрируемы, поскольку $u(0)=0$. Для первого слагаемого справа аналогично (3.4.7) получаем

$$\left\|t^{-1-s}\int\limits_0^t [u(t)-u(\tau)]\,d\tau\right\|_{I_1} \leqslant \left(\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{|u(t)-u(\tau)|^2}{|t-\tau|^{1+2s}}\,dt\,d\tau\right)^{1/2}. \qquad (3.4.12)$$

Для второго слагаемого справа в (3.4.11) аналогично (3.4.8) получаем

$$\left\|t^{-1-s}\int\limits_0^t u(\tau)\,d\tau\right\|_{I_1} \leqslant \delta(s)\|t^{-s}u(t)\|_{I_1}, \qquad (3.4.13)$$

где

$$\delta(s) = \int\limits_0^1 \sigma^{s-1/2}\,d\sigma < 1. \qquad (3.4.14)$$

В итоге получается неравенство

$$\|t^{-s}u(t)\|_{I_1} \leqslant (1-\delta(s))^{-1}\left(\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|u(t)-u(\tau)|^2}{|t-\tau|^{1+2s}}\,dt\,d\tau\right)^{1/2}, \qquad (3.4.15)$$

приводящее к цели. □

Следствие 3.4.3. *При* $0<s<1/2$ *для интеграла* (3.4.3) *справедливо неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \frac{|u(x',x_n)|^2}{x_n^{2s}}\,dx_n\,dx' \leqslant$$

$$\leqslant C\left[\int_{\mathbb{R}^n_+}|u(x)|^2\,dx+\int_{\mathbb{R}^{n-1}}dx'\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|u(x',t)-u(x',\tau)|^2}{|t-\tau|^{1+2s}}\,dt\,d\tau\right]. \qquad (3.4.16)$$

Такое же неравенство верно при $1/2<s<1$ *для функций* $u(x)$ *с* $u(x',0)=0$.

Действительно, это получается из нашего результата в одномерном случае интегрированием по x'. В свою очередь, из этого следствия вытекает утверждение теоремы 3.4.1, так как

$$\int_{\mathbb{R}^n_+}|u|^2\,dx+\int_{\mathbb{R}^{n-1}}dx'\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|u(x',t)-u(x',\tau)|^2}{|t-\tau|^{1+2s}}\,dt\,d\tau \leqslant \|u\|'^2_{H^s(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Поясним, что слева мы имеем квадрат анизотропной нормы порядка $(0,s)$ по (x',x_n). Это выявляется преобразованием Фурье по x'. □

Теперь докажем теорему с полным описанием функций из $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ при не полуцелом $s>0$, допускающих продолжение нулем, при котором получается функция из $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 3.4.4. *Пусть* s — *положительное не полуцелое число и* $u(x)$ — *функция из* $H^s(\mathbb{R}^n_+)$. *Положим*

$$v(x)=\begin{cases} u(x) & \text{при } x_n>0,\\ 0 & \text{при } x_n<0. \end{cases} \qquad (3.4.17)$$

При $0<s<1/2$ *эта функция принадлежит* $H^s(\mathbb{R}^n)$. *При* $s>1/2$ *для принадлежности этой функции к* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *необходимо и достаточно, чтобы данные Коши порядка* $[s-1/2]$ *функции* $u(x)$ *при* $x_n=0$ *равнялись нулю. В этом случае*

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n_+)}. \qquad (3.4.18)$$

Доказательство. Необходимость этих условий следует из того, что продолженная функция должна иметь одинаковые данные Коши с двух сторон при $x_n = 0$. Проверим достаточность. Интегрированием по частям проверяем, что производные продолженной функции порядка не выше s в смысле обобщенных функций совпадают с продолжениями нулем тех же производных исходной функции. Если s не полуцелое, то теперь дело сводится к оценке норм производных старшего порядка продолженной функции через нормы производных того же порядка исходной функции, а это делается при помощи теоремы 3.4.1.

В (3.4.18) мы уже получили второе неравенство, а первое следует просто из определения нормы в полупространстве. □

Если s — полуцелое положительное число, то мы получим достаточные условия для возможности продолжения нулем, если включим в них условие сходимости интегралов, которые оценить не удается:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|\partial^\alpha u(x)|^2}{|x_n|}\,dx < \infty \quad (|\alpha| = s - 1/2). \tag{3.4.19}$$

См. [12].

3.5. Склейка функций из $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ и $H^s(\mathbb{R}^n_-)$.

Теорема 3.5.1. *Пусть s — положительное не полуцелое число, и пусть функции $u_\pm(x)$ принадлежат соответственно $H^s(\mathbb{R}^n_\pm)$. Положим*

$$u(x) = \begin{cases} u_+(x) & \textit{при}\ \ x_n > 0, \\ u_-(x) & \textit{при}\ \ x_n < 0. \end{cases} \tag{3.5.1}$$

Если $0 < s < 1/2$, то эта функция принадлежит $H^s(\mathbb{R}^n)$. Если $s > 1/2$, то для ее принадлежности к $H^s(\mathbb{R}^n)$ необходимо и достаточно, чтобы функции $u_\pm(x)$ имели при $x_n = 0$ одинаковые данные Коши порядка $[s - 1/2]$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно: мы можем продолжить функции нулем и сложить. Пусть $s > 1/2$. Необходимость условий следует из того, что функция из $H^s(\mathbb{R}^n)$ должна иметь одинаковые данные Коши с двух сторон при $x_n = 0$. Достаточность проверяется следующим образом. Вычтем из $u(x)$ функцию из $H^s(\mathbb{R}^n)$ с заданными данными Коши. После этого в полупространствах $\mathbb{R}^n_\pm$ мы будем иметь функции, допускающие продолжение нулем на $\mathbb{R}^n_\mp$, получатся функции из $H^s(\mathbb{R}^n)$, и их снова можно сложить. □

3.6. Разложение пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ при $|s| < 1/2$ в сумму двух подпространств. Вернемся к теореме 3.4.1. Из нее получаем

Следствие 3.6.1. *При $0 \leqslant s < 1/2$ оператор умножения на характеристическую функцию θ_+ полупространства $\mathbb{R}^n_+$ ограничен в $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Действительно, при $s = 0$ это очевидно. Пусть $0 < s < 1/2$ и $w \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Тогда сужение u функции w на $\mathbb{R}^n_+$ принадлежит $H^s(\mathbb{R}^n_+)$, и по доказанному

$$\|\mathcal{E}_0 u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Но норма в правой части не превосходит $\|w\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$, а функция $\mathcal{E}_0 u$ совпадает с $\theta_+ w$. □

Разумеется, для $\mathbb{R}^n_-$ все аналогично.

Следствие 3.6.2. *При $0 \leqslant s < 1/2$ любая функция w из $H^s(\mathbb{R}^n)$ представима в виде суммы двух функций $w_\pm$ из этого пространства с носителями соответственно в $\overline{\mathbb{R}^n_\pm}$. При этом операторы перехода от w к $w_\pm$ ограничены.*

Действительно, достаточно положить

$$w_\pm = \theta_\pm w, \tag{3.6.1}$$

где θ_- — характеристическая функция полупространства $\mathbb{R}^n_-$.

Теперь нам понадобится теорема 1.11.3. Используя ее, получаем из следствия 3.6.2

Следствие 3.6.3. *При $0 \leqslant s < 1/2$ каждую функцию w из $H^s(\mathbb{R}^n)$ можно с любой точностью аппроксимировать в этом пространстве суммой двух функций $\widetilde{w}_\pm$ из него с носителями, лежащими соответственно строго внутри $\mathbb{R}^n_\pm$, и, значит, суммой двух функций $\varphi_\pm$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителями, лежащими строго внутри этих полупространств.*

Следствие 3.6.4. *Оператор умножения на θ_+ продолжается до ограниченного оператора в $H^s(\mathbb{R}^n)$ при $-1/2 < s < 0$.*

Действительно, это пространство сопряжено к $H^{|s|}(\mathbb{R}^n)$ относительно продолжения формы $(u, v)_{0,\mathbb{R}^n}$. Для функций φ, ψ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$(\theta_+\varphi, \psi)_{\mathbb{R}^n} = (\varphi, \theta_+\psi)_{\mathbb{R}^n}.$$

Аппроксимируя такими функциями ψ заданную функцию v из $H^{|s|}(\mathbb{R}^n)$ и функциями φ заданную (обобщенную) функцию u из

$H^s(\mathbb{R}^n)$, можно перейти к пределу справа. Значит, и левая часть имеет предел, чем и определяется интересующий нас оператор:

$$(\theta_+ u, v)_{\mathbb{R}^n} = (u, \theta_+ v)_{\mathbb{R}^n}. \tag{3.6.2}$$

Нетрудно убедиться в корректности этого определения — его независимости от выбора аппроксимирующих последовательностей. Остается воспользоваться следствием 3.6.1.

Итак, операторы умножения на характеристические функции $\theta_\pm$ полупространств $\mathbb{R}^n_\pm$ ограничены в $H^s(\mathbb{R}^n)$ при $|s| < 1/2$. Эти операторы — обозначим их через $P_\pm$ — в сумме равны единичному оператору I. Они являются взаимно дополнительными проекторами в $H^s(\mathbb{R}^n)$ на подпространства в этом пространстве, состоящие из элементов с носителями в $\overline{\mathbb{R}^n_\pm}$. Обозначим эти подпространства через $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_\pm)$. Более общие пространства $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ мы рассмотрим в § 4.

При $s > 1/2$ оператор умножения на функцию θ_+ уже не является ограниченным в $H^s(\mathbb{R}^n)$ по существу из-за того, что при $x_n = 0$ функция из этого пространства может иметь ненулевой след. На самом деле ограниченности нет и при $s = 1/2$. Пример фактически содержится в книге Г. И. Эскина [62].

Полученные результаты допускают другое содержательное доказательство, приведенное в только что указанной книге, основанное на переходе к преобразованиям Фурье. Можно показать, что если φ — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то

$$\begin{aligned} F(P_+\varphi)(\xi) = F[\theta_+\varphi](\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\psi(\xi', \eta_n)}{\xi_n - i0 - \eta_n}\, d\eta_n = \\ = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\tau\to -0}\int \frac{\psi(\xi', \eta_n)}{\xi_n + i\tau - \eta_n}\, d\eta_n, \end{aligned} \tag{3.6.3}$$

где $\psi = F\varphi$. Выражение в правой части обозначим через $\Pi_+\psi$. Оператор Π_+ можно записать также в виде

$$\Pi_+\psi(\xi) = \frac{1}{2}\psi(\xi) + \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{p.v.}\int \frac{\psi(\xi', \eta_n)}{\xi_n - \eta_n}\, d\eta_n. \tag{3.6.4}$$

Здесь мы имеем сингулярный интегральный оператор (знаменатель имеет критическую особенность); буквы p.v. (principal value) означают, что понимать его надо в смысле главного значения по Коши — как предел интеграла по η_n с $|\xi_n - \eta_n| > \varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$. См. п. 17.4.

Аналогичный оператор $\Pi_- = I - \Pi_+$ для $\mathbb{R}^n_-$ выражается такой же формулой с изменением знака перед вторым слагаемым:

$$\Pi_-\psi(\xi) = \frac{1}{2}\psi(\xi) - \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{p.v.}\int \frac{\psi(\xi', \eta_n)}{\xi_n - \eta_n}\,d\eta_n. \tag{3.6.5}$$

Доказывается, что оператор Π_+ действует ограниченным образом в пространстве $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n)$ образов Фурье функций из $H^s(\mathbb{R}^n)$ при $|s| < 1/2$. Такое же утверждение верно для оператора $\Pi_- = I - \Pi_+$. Там же приведен подпирающий пример, показывающий, что утверждение неверно при $s = 1/2$: оператор Π_+ не ограничен в $H^{1/2}(\mathbb{R}^n)$; его область определения плотна в этом пространстве.

§4. Пространства $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ и $\mathring{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$

4.1. Пространства $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$. *Пространство* $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ при любом вещественном s определяется как подпространство функций из $H^s(\mathbb{R}^n)$ с носителями, лежащими в $\overline{\mathbb{R}^n_+}$. Норма в $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ наследуется из $H^s(\mathbb{R}^n)$. Условие замкнутости выполняется очевидным образом. Действительно, пусть последовательность функций u_j из $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ сходится к u в этом пространстве, а φ — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителем, содержащимся в $\mathbb{R}^n_-$. Тогда $(u_j, \varphi)_{\mathbb{R}^n} = 0$, и в силу обобщенного неравенства Шварца (рассматриваем функцию φ как лежащую в $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$) получается, что $(u, \varphi)_{\mathbb{R}^n} = 0$.

Используя плотность линеала $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$ и операцию сдвига (см. п. 1.11), нетрудно проверить, что *множество финитных бесконечно гладких функций с носителями, лежащими внутри* $\mathbb{R}^n_+$, *плотно в* $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$. Поэтому $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ можно определить и как пополнение линеала $C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ (функции из него считаем продолженными нулем на $\overline{\mathbb{R}^n_-}$) в $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Элементы пространства $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ можно рассматривать также как функции из $H^s(\mathbb{R}^n_+)$, которые после их продолжения нулем на $\mathbb{R}^n_-$ оказываются принадлежащими $H^s(\mathbb{R}^n)$. Этим мотивируется обозначение.

В теоремах 3.4.1 и 3.4.4 продолженные нулем функции попадают, конечно, в $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$. Фактически оператор продолжения нулем ограничен при $|s| < 1/2$. Например, это видно из следствий 3.6.1 и 3.6.4: продолжение нулем равносильно какому угодно продолжению до функции из $H^s(\mathbb{R}^n)$ с последующим умножением на θ_+. В обратную сторону ограничен оператор сужения. Поэтому получается

Теорема 4.1.1. *Пространства $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ и $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ допускают отождествление при $|s|<1/2$, соответствующие нормы эквивалентны.*

Для $\mathbb{R}^n_-$ все можно повторить с естественными поправками.

Пространства $H^s(\mathbb{R}^n_\pm)$ фактически являются фактор-пространствами:

$$H^s(\mathbb{R}^n_\pm) = H^s(\mathbb{R}^n)/\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_\mp). \tag{4.1.1}$$

Введем оператор

$$\Lambda^t_+ = F^{-1}[i\xi_n + \langle\xi'\rangle]^t F. \tag{4.1.2}$$

Здесь вещественная степень z^h ненулевого комплексного числа z с главным значением аргумента $\arg z \in (-\pi, \pi]$ определяется равенством

$$z^h = |z|^h e^{ih\arg z}.$$

В следующей теореме описывается образ пространства $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ при преобразовании Фурье. Мы приведем краткие пояснения; детали можно найти в книге Эскина [62].

Теорема 4.1.2. *Пусть $u(x)$ — функция (или обобщенная функция) из $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ и $v(\xi)$ — ее преобразование Фурье. Тогда при почти всех ξ' функция $v(\xi', \xi_n)$ допускает аналитическое продолжение до регулярной функции $v(\xi', \zeta_n)$ по последнему переменному $\zeta_n = \xi_n + i\tau$ в нижней полуплоскости ($\tau<0$), являющееся непрерывной функцией от τ ($\tau \leqslant 0$) со значениями в $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n)$. При этом*

$$\int |v(\xi', \xi_n + i\tau)|^2 (1+|\xi|^2+|\tau|^2)^s \, d\xi \leqslant C_u, \quad \tau \leqslant 0, \tag{4.1.3}$$

где постоянная справа не зависит от τ.

Обратно, любая функция v с такими свойствами является преобразованием Фурье функции из $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$.

Верхнюю грань левой части в (4.1.3) *можно принять за квадрат нормы в $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$.*

Оператор Λ^t_+ взаимно однозначно и непрерывно отображает пространство $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ на пространство $\widetilde{H}^{s-t}(\mathbb{R}^n_+)$ при любых вещественных s и t. Обратным к нему является оператор Λ^{-t}_+.

При $s=0$ первый абзац формулировки в случае $n=1$ — это один из вариантов теоремы Пэли—Винера, ср. [2, § 5]. Поясним его следующим образом. Если $u(x)$ — функция из $L_2(\mathbb{R})$, равная нулю при $x<0$, а $v(\xi)$ — ее преобразование Фурье, то при $\tau<0$ функция

$$F[u(x)e^{x\tau}] = \int_0^\infty e^{-ix(\xi+i\tau)} u(x)\, dx = v(\xi + i\tau) \tag{4.1.4}$$

допускает дифференцирование по комплексному переменному $\zeta = \xi + i\tau$ и имеет равномерно по τ ограниченную L_2-норму по переменному ξ в силу равенства Парсеваля:

$$\|v(\xi + i\tau)\| = c\|u(x)e^{\tau x}\| \leqslant \text{Const}.$$

Очевидно также, что

$$\|v(\xi + i\tau) - v(\xi)\| = c\|u(x)[1 - e^{\tau x}]\| \to 0 \quad \text{при } \tau \uparrow 0.$$

Обратно, если $v(x)$ обладает только что указанными свойствами, то для прообраза Фурье этой функции при $\tau < 0$

$$\|u(x)e^{x\tau}\| \leqslant \text{Const},$$

а отсюда от противного выводится, что $u(x) = 0$ при $x < 0$ почти всюду.

Распространение результата на $n > 1$ не вызывает затруднений.

Оператор Λ_+^t аналогичен оператору Λ^t (см. п. 1.4), и ясно, что он непрерывно и однозначно отображает $H^s(\mathbb{R}^n)$ на $H^{s-t}(\mathbb{R}^n)$. Но для образов Фурье Fu функций u из $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}_+^n)$ он сохраняет аналитичность по $\zeta_n = \xi_n + i\tau$ в нижней полуплоскости, что по существу связано с равенством прообраза Фурье $u(x)$ нулю при $x_n < 0$. Он сохраняет также оценки вида (4.1.3) ввиду очевидной эквивалентности

$$|i\zeta_n + \langle \xi' \rangle| \sim 1 + |\xi'| + |\xi_n| + |\tau|.$$

Еще одна теорема о пространствах $\widetilde{H}^{-s}(\mathbb{R}_+^n)$ (отрицательного порядка) будет приведена в п. 4.3.

4.2. Двойственность пространств $H^s(\mathbb{R}_+^n)$ и $\widetilde{H}^{-s}(\mathbb{R}_+^n)$.

Теорема 4.2.1. *Пространства $H^s(\mathbb{R}_+^n)$ и $\widetilde{H}^{-s}(\mathbb{R}_+^n)$ являются взаимно сопряженными относительно продолжения скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}_+^n)$ на их прямое произведение. Здесь $-\infty < s < \infty$. В частности, эти пространства рефлексивны.*

Доказательство. 1. Пусть u_1 — любой элемент из $H^s(\mathbb{R}_+^n)$, v_1 — принадлежащее $H^s(\mathbb{R}^n)$ продолжение для $u_1 \in H^s(\mathbb{R}_+^n)$, а u_2 — сначала финитная бесконечно гладкая функция с носителем, лежащим внутри $\mathbb{R}_+^n$. Тогда форма

$$(u_1, u_2)_{\mathbb{R}_+^n} := (v_1, u_2)_{\mathbb{R}^n} \tag{4.2.1}$$

определена и не зависит от выбора продолжения v_1. Здесь u_2 рассматривается как элемент из $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Эта форма продолжается на

u_2 из $\widetilde{H}^{-s}(\mathbb{R}^n_+)$, поскольку там плотно множество бесконечно гладких финитных функций с носителями, лежащими внутри $\mathbb{R}^n_+$. В силу обобщенного неравенства Шварца

$$|(v_1, u_2)_{\mathbb{R}^n}| \leqslant \|v_1\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \|u_2\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} = \|v_1\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \|u_2\|_{\widetilde{H}^{-s}(\mathbb{R}^n)}.$$

Отсюда переходом к нижней грани нормы по выбору v_1 получаем

$$|(v_1, u_2)_{\mathbb{R}^n}| \leqslant \|u_1\|_{H^s(\mathbb{R}^n_+)} \|u_2\|_{\widetilde{H}^{-s}(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{4.2.2}$$

Мы ввели нужную двойственность, получили обобщенное неравенство Шварца в $\mathbb{R}^n_+$ и показали, что каждый элемент u_2 из $\widetilde{H}^{-s}(\mathbb{R}^n_+)$ определяет линейный непрерывный функционал над $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ по формуле (4.2.1), при этом норма этого функционала не превосходит $\|u_2\|_{\widetilde{H}^{-s}(\mathbb{R}^n_+)}$.

Обратно, пусть $f(u_1)$ — линейный непрерывный функционал над $H^s(\mathbb{R}^n_+)$. Взяв любое $v_1 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, получаем линейный непрерывный функционал

$$g(v_1) = f(v_1|_{\mathbb{R}^n_+})$$

над $H^s(\mathbb{R}^n)$, так как операция сужения на $\mathbb{R}^n_+$ непрерывна из $H^s(\mathbb{R}^n)$ в $H^s(\mathbb{R}^n_+)$. Но функционалы над $H^s(\mathbb{R}^n)$ реализуются при помощи элементов из $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$:

$$g(v_1) = (v_1, u_2)_{\mathbb{R}^n}.$$

Наш функционал равен нулю, если v_1 — финитная бесконечно гладкая функция с носителем в $\mathbb{R}^n_-$. Поэтому $\operatorname{supp} u_2 \subset \overline{\mathbb{R}^n_+}$ и $u_2 \in \widetilde{H}^{-s}(\mathbb{R}^n_+)$. Мы представили наш функционал $f(u_1)$ в виде (4.2.1). От выбора продолжения v_1 для u_1 он не зависит.

При этом

$$\|u_2\|_{\widetilde{H}^{-s}(\mathbb{R}^n_+)} = \|u_2\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{v_1 \neq 0} \frac{|(v_1, u_2)_{\mathbb{R}^n}|}{\|v_1\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}}.$$

Пусть $v_1|_{\mathbb{R}^n_+} = u_1$, тогда справа стоит

$$\sup_{v_1 \neq 0} \frac{|f(u_1)|}{\|v_1\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}} \leqslant \sup_{u_1 \neq 0} \frac{|f(u_1)|}{\|u_1\|_{H^s(\mathbb{R}^n_+)}}.$$

Правая часть — норма нашего функционала. Мы получили обратное неравенство: норма $\|u_2\|_{\widetilde{H}^{-s}(\mathbb{R}^n_+)}$ не превосходит нормы соответствующего функционала. Значит, эти величины совпадают.

2. Пусть u_1 — любой элемент из $H^{-s}(\mathbb{R}^n_+)$. Тогда форма (4.2.1) определяет антилинейный непрерывный функционал над $u_2 \in \widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$. Здесь v_1 — любое продолжение для u_1, принадлежащее $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, от выбора которого функционал не зависит. Норма этого функционала не превосходит $\|u_1\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n_+)}$. Это проверяется, как в начале доказательства: используем обобщенное неравенство Шварца и минимизацию по продолжениям.

Пусть теперь $h(u_2)$ — непрерывный антилинейный функционал над $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$. По теореме Хана—Банаха его можно продолжить на все $H^s(\mathbb{R}^n)$ без увеличения нормы и после этого представить в виде

$$h(u_2) = (v_1, u_2)_{\mathbb{R}^n},$$

где $v_1 \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. При этом

$$\|v_1\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} = \sup \frac{|(v_1, u_2)_{\mathbb{R}^n}|}{\|u_2\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым $u_2 \in H^s(\mathbb{R}^n)$. В числителе стоит модуль значения нашего функционала на u_2. Значит, справа — норма продолженного функционала. Но так как при продолжении норма не увеличилась, то верхнюю грань достаточно брать по $u_2 \in \widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$. Если v_1 — продолжение для $u_1 \in H^{-s}(\mathbb{R}^n_+)$, то слева можно сделать минимизацию и получить оценку для $\|u_1\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n_+)}$ через норму функционала. Значит, эти величины совпадают. □

Замечания. 1. Двойственность можно записать также следующим образом. Если u_1 принадлежит пространству $H^s(\mathbb{R}^n_+)$, а u_2 — пространству $\widetilde{H}^{-s}(\mathbb{R}^n_+)$, то в первом пространстве аппроксимируем функцию u_1 последовательностью функций φ_k из $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, а во втором — функцию u_2 последовательностью функций ψ_k из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$. Полагаем

$$(u_1, u_2)_{\mathbb{R}^n_+} = \lim_{k\to\infty} (\varphi_k, \psi_k)_{0,\mathbb{R}^n_+}. \tag{4.2.3}$$

2. После того как мы построим универсальный оператор продолжения $\mathcal{E}$ (в § 10), можно будет написать

$$(u_1, u_2)_{\mathbb{R}^n_+} = (\mathcal{E}u_1, u_2)_{\mathbb{R}^n}. \tag{4.2.4}$$

4.3. Пространства $\mathring{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$. Это подпространство пространства $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ определяется как пополнение линеала $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ в $H^s(\mathbb{R}^n_+)$.

Мы хотим выяснить, из каких элементов в $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ состоит это подпространство. В частности, представляет интерес его сравнение с самим $H^s(\mathbb{R}^n_+)$, а также с $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$. Пространства $\mathring{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ и $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ — это два пополнения линеала $C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, но по разным нормам: в $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ и в $H^s(\mathbb{R}^n)$ (во втором случае подразумевается продолжение функций нулем вне $\mathbb{R}^n_+$).

Но прежде чем заняться этими вопросами, мы приведем вспомогательную теорему о пространствах $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ отрицательного порядка, представляющую самостоятельный интерес. Она взята из книги [87].

Обозначим через $\mathbb{R}^{n-1}_0$ граничную гиперплоскость полупространства $\mathbb{R}^n_+$, определяемую уравнением $x_n=0$, и через $H_0^{-s}(\mathbb{R}^n)$ подпространство элементов из $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ с носителями на этой гиперплоскости. Речь идет об описании этого подпространства. Очевидно, что оно совпадает с $\widetilde{H}^{-s}(\mathbb{R}^n_-)\cap\widetilde{H}^{-s}(\mathbb{R}^n_+)$.

Теорема 4.3.1. *Пространство $H_0^{-s}(\mathbb{R}^n)$ состоит из одного нуля при $s\leqslant 1/2$, а при $s>1/2$ оно состоит из обобщенных функций вида*

$$f=\sum_{0\leqslant j<s-1/2} g_j\otimes\delta^{(j)}(x_n),\quad \text{где } g_j\in H^{-s+j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{4.3.1}$$

Здесь $\delta^{(j)}(x_n)$ — производная порядка j от дельта-функции $\delta(x_n)$. Из (4.3.1) видно, в частности, что f как «обобщенная функция по x_n» сосредоточена в одной точке 0.

В доказательстве мы ограничимся случаем полуцелых $s=k+1/2$, $k\in\mathbb{Z}_+$. Случай $s\in(k+1/2,k+3/2)$ немного проще (не нужен последний шаг, см. ниже), и мы его оставляем читателю. Неравенство $j<s-1/2$ теперь имеет вид $j<k$.

Доказательство теоремы 4.3.1 для $s=k+1/2$. Прежде всего отметим, что обобщенные функции вида (4.3.1) принадлежат $H_0^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Действительно, они сосредоточены на гиперплоскости $x_n=0$ и имеют преобразования Фурье, принадлежащие, как нетрудно проверить, $\widehat{H}^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Сделаем следующее замечание. Если $f\in H_0^{-s}(\mathbb{R}^n)$, $s=k+1/2$, и ρ — функция из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ с нулевыми данными Коши при $x_n=0$ до порядка k *включительно*, то $\langle f,\rho\rangle=0$. Действительно, положим

$$\rho_\pm(x)=\begin{cases}\rho(x) & \text{при } x\in\mathbb{R}^n_\pm,\\ 0 & \text{вне } \mathbb{R}^n_\pm.\end{cases}$$

Тогда $\rho_\pm \in \widetilde{H}^\sigma(\mathbb{R}^n_\pm)$, $\sigma \in (s, s+1)$. Поэтому $\rho_\pm$ можно аппроксимировать функциями из $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ с носителями, лежащими внутри $\mathbb{R}^n_\pm$, а такие основные функции обобщенная функция f аннулирует. Значит, она аннулирует ρ.

Теперь для заданной обобщенной функции $f \in H_0^{-s}(\mathbb{R}^n)$, $s = k + 1/2$, мы построим такие обобщенные функции

$$g_j \in H^{-s+j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \quad (j = 0, \dots, k),$$

что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ выполняется равенство

$$\left\langle f - \sum_0^k g_j \oplus \delta^{(j)}, \varphi \right\rangle = \langle f, \rho \rangle, \tag{4.3.2}$$

где ρ — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с нулевыми данными Коши при $x_n = 0$ до порядка k включительно. В силу только что сделанного замечания правая часть здесь нулевая, так что мы получим (4.3.1), но с «лишним» слагаемым ($j = k$). В конце доказательства мы покажем, что оно равно нулю.

Для построения g_j воспользуемся операторами (3.3.7) и леммой 3.3.4. Определим g_j формулой

$$\langle g_j, \varphi \rangle = (-1)^j (f, T_j \varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})). \tag{4.3.3}$$

Тогда справедлива формула (4.3.2), где

$$\rho = \varphi - \sum_0^k T_j \psi_j, \quad \psi_j = \partial_n^j \varphi(x', 0), \tag{4.3.4}$$

так что ρ имеет при $x_n = 0$ нулевые данные Коши до порядка k включительно. При этом

$$|\langle g_j, \varphi \rangle| \leqslant \|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} \|T_j \varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{H^{s-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

так что $\|g_j\|_{H^{-s+j+1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C \|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)}$. Получается формула (4.3.1) с лишним последним слагаемым.

Остается показать, что в этом последнем слагаемом g_k равно нулю. Допустим, что это не так.

Как было показано на первом шаге доказательства, остальные слагаемые вместе с левой частью принадлежат $H^{-k-1/2}(\mathbb{R}^n)$. Значит, рассматриваемое слагаемое тоже ему принадлежит. Запишем квадрат его нормы через преобразование Фурье:

$$\iint \frac{|(F' g_k)(\xi')|^2 \xi_n^{2k}}{(1 + |\xi'|^2 + \xi_n^2)^{k+1/2}} \, d\xi' \, d\xi_n.$$

Так как
$$1+|\xi'|^2+\xi_n^2 \leqslant (1+|\xi'|^2)(1+\xi_n^2),$$
то последний интеграл не меньше
$$\int \frac{|(F'g_k)(\xi')|^2}{(1+|\xi'|^2)^{k+1/2}}\,d\xi' \int \frac{\xi_n^{2k}}{(1+\xi_n^2)^{k+1/2}}\,d\xi_n.$$
Но здесь последний интеграл расходится, поэтому обязательно $(F'g_k)(\xi')=0$ почти всюду, т. е. на самом деле g_k — нулевая функция. □

Как функционалы над функциями, скажем, из $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ элементы рассмотренного пространства действуют на граничные значения этих функций. Приведем полезный для дальнейшего пример.

Пример. Пространство $\widetilde{H}^{-1-\sigma}(\mathbb{R}^n_+)$, $|\sigma|<1/2$, дуально к $H^{1+\sigma}(\mathbb{R}^n_+)$ и содержит функционалы, сосредоточенные на граничной гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1}$. Пусть речь идет об антилинейных функционалах. Как видно из теоремы, они реализуются в виде $(g,u^+)_{\mathbb{R}^{n-1}}$: здесь $u^+\in H^{1/2+\sigma}(\mathbb{R}^{n-1})$ и $g\in H^{-1/2-\sigma}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Теперь перейдем к пространствам $\mathring{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$.

Теорема 4.3.2. *Пространства $\mathring{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ и $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ совпадают при $s\leqslant 1/2$ и не совпадают при $s>1/2$.*

Иначе говоря, линеал $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ плотен в $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ в том и только в том случае, когда $s\leqslant 1/2$.

Доказательство. Плотность легко проверяется при $s<1/2$. Действительно, если $0<s<1/2$, то функция из $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ допускает продолжение нулем до функции из $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$, а там плотны бесконечно гладкие функции с носителями в $\mathbb{R}^n_+$, поэтому они плотны и в $H^s(\mathbb{R}^n_+)$. Как следствие функции из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ плотны в $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ и при отрицательных s. При $s>1/2$ такого результата быть не может, так как при этих s функция из $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ может иметь ненулевое граничное значение.

При $s=1/2$ нет ограниченного оператора продолжения нулем. Однако если бы замыкание линеала $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ в гильбертовом пространстве $H^{1/2}(\mathbb{R}^n_+)$ не совпадало с последним пространством, то в двойственном пространстве $\widetilde{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^n_+)$ нашелся бы ненулевой функционал, сосредоточенный на граничной гиперплоскости. Но из теоремы 4.3.1 следует, что таких функционалов нет. □

Теорема 4.3.3. *При $s > 1/2$ пространство $\mathring{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ совпадает с подпространством в $H^s(\mathbb{R}^n_+)$, состоящим из элементов u, у которых все производные $\partial^\alpha u(x)$ порядка $|\alpha| < s - 1/2$ обращаются в нуль при $x_n = 0$. Это равносильно обращению в нуль данных Коши $\partial^j u(x', 0)$, $j < s - 1/2$.*

Доказательство. Поясним прежде всего, что все эти производные получаются дифференцированием производных по x_n при $x_n = 0$. Далее, функция из $H^s(\mathbb{R}^n_+)$, допускающая (сколь угодно точную) аппроксимацию функциями из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$, обязательно имеет нулевые производные порядка $|\alpha| < s - 1/2$, так как они нулевые у аппроксимирующих функций, а из сходимости в $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ следует сходимость граничных значений этих производных в соответствующих пространствах. В обратную сторону мы легко можем получить результат при не полуцелых s. Действительно, в этом случае указанное подпространство состоит из функций, допускающих ограниченное продолжение нулем до функций из $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$, а такие функции можно аппроксимировать финитными бесконечно гладкими функциями с носителями, лежащими в $\mathbb{R}^n_+$.

При полуцелых s остается сослаться на теорему 4.3.1. Из нее следует, что именно на этом подпространстве нет нетривиальных функционалов, сосредоточенных на граничной гиперплоскости. ☐

Сравнивая полученные результаты с результатами в п. 3.4, получаем

Следствие 4.3.4. *При не полуцелом $s > 0$ пространство $\mathring{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ совпадает с подпространством функций в $H^s(\mathbb{R}^n_+)$, продолжения которых нулем принадлежат $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$. При этом нормы такой функции в $\mathring{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ и ее продолжения в $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ эквивалентны.*

При полуцелом s сужения функций из $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ на $\mathbb{R}^n_+$ содержатся в $\mathring{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$. В силу определения нормы в $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ как нижней грани соответствующее вложение непрерывно.

4.4. Пространства $\widetilde{H}^{-s}(\mathbb{R}^n_+)$ и $H^{-s}(\mathbb{R}^n_+)$ при $s > 1/2$. Можно считать, что пространство $\widetilde{H}^{-s}(\mathbb{R}^n_+)$ состоит из непрерывных антилинейных функционалов над $H^s(\mathbb{R}^n_+)$. Их сужения на подпространство $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ образуют пространство $H^{-s}(\mathbb{R}^n_+)$. И наоборот, антилинейные непрерывные функционалы на $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ продолжаются до непрерывных антилинейных функционалов на $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ по теореме Хана—Банаха.

Если мы зафиксируем единый способ продолжения функционалов на $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ до функционалов на $H^s(\mathbb{R}^n_+)$, то получим включение

$$\widetilde{H}^{-s}(\mathbb{R}^n_+) \supset H^{-s}(\mathbb{R}^n_+). \tag{4.4.1}$$

Например, и это проще всего, можно воспользоваться тем, что $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ как подпространство в гильбертовом пространстве $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ имеет ортогональное дополнение, и договориться считать, что функционалы на $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$ продолжаются нулем на это дополнение.

Это включение строгое, так как левое пространство при $s > 1/2$ содержит еще функционалы, сосредоточенные на граничной гиперплоскости. Их структура по существу указана в теореме 4.3.1.

§ 5. Пространства H^s в ограниченной области с гладкой границей и на компактном гладком многообразии с краем

В этом параграфе через Ω мы обозначаем ограниченную область в $\mathbb{R}^n$ с бесконечно гладкой $(n-1)$-мерной границей Γ и через M — компактное бесконечно гладкое n-мерное многообразие с $(n-1)$-мерным бесконечно гладким краем ∂M. Ограниченная область Ω с бесконечно гладкой границей — это частный случай такого многообразия. Другой важный частный случай — часть (бесконечно гладкой) границы ограниченной $(n+1)$-мерной области или вообще гиперповерхность с бесконечно гладким краем в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Уточним, что бесконечная гладкость границы области Ω означает следующее. Вблизи каждой точки x_0 границы она после подходящего поворота исходной декартовой системы координат является графиком бесконечно гладкой функции $x_n = \varphi(x')$, определенной на некотором $(n-1)$-мерном шаре $\{x' : |x'| \leqslant R\}$, $R > 0$. При переходе точки x через границу разность $x_n - \varphi(x')$ меняет знак. Если $x_n - \varphi(x')$ переобозначить через x_n, то граница (локально) становится гиперплоскостью $\{x : x_n = 0\}$; эту замену будем называть *выпрямлением границы*.

5.1. Пространства $H^s(\Omega)$. Все определения и основные утверждения в случае ограниченной области с бесконечно гладкой границей очень похожи на определения и утверждения в случае полупространства $\mathbb{R}^n_+$. Надо лишь заменить полупространство $\mathbb{R}^n_+$ на область Ω и полупространство $\mathbb{R}^n_-$ на дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ к замыканию $\overline{\Omega}$ области. Доказательства в основном сводятся к использованию результатов в случае полупространства. Мы остановимся на основных утверждениях, опуская очевидную проверку.

Пространства $C^\infty(\overline{\Omega})$, $C^m(\overline{\Omega})$, $C^{m+\theta}(\overline{\Omega}) = C^{m,\theta}(\overline{\Omega})$ и $C^{m,1}(\overline{\Omega})$, где m — целое неотрицательное число и $0 < \theta < 1$, удобнее всего определить как состоящие из сужений на $\overline{\Omega}$ функций из соответствующих пространств в $\mathbb{R}^n$ с inf-нормами.

Пространство $H^s(\Omega)$ определяется при любом s как состоящее из сужений u элементов из $H^s(\mathbb{R}^n)$ на Ω (при $s < 0$ в смысле обобщенных функций) с нормой

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} : v \in H^s(\mathbb{R}^n), \quad v|_\Omega = u. \tag{5.1.1}$$

При $s \geqslant 0$ пространство $H^s(\Omega)$ можно определить также как состоящее из таких квадратично суммируемых функций, что их производные в смысле обобщенных функций в Ω квадратично суммируемы и при этом конечны нормы Соболева—Слободецкого. При целом $s = m$ имеется в виду норма, определяемая равенством

$$\|u\|'^2_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{5.1.2}$$

В сумме справа можно оставить только $\alpha = (0, \ldots, 0)$, $(m, 0, \ldots, 0)$, … …, $(0, \ldots, 0, m)$. При нецелом $s = m + \theta$, где $m = [s]$ и $0 < \theta < 1$,

$$\|u\|'^2_{H^{m+\theta}(\Omega)} = \|u\|'^2_{H^m(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\, dx\, dy. \tag{5.1.3}$$

Теорема 5.1.1. *При $s \geqslant 0$ эти определения эквивалентны.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1.1, но нужен *оператор продолжения* функций из $H^s(\Omega)$ до функций из $H^s(\mathbb{R}^n)$, действующий ограниченным образом в нормах $\|\cdot\|'_{H^s}$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$. Такой оператор (его тоже надо называть оператором Хестенса) строится при помощи разбиения единицы следующим образом.

Компактность границы позволяет определить такое бесконечно гладкое конечное разбиение единицы

$$\sum_{j=0}^m \varphi_j(x) \equiv 1 \tag{5.1.4}$$

в окрестности замыкания области Ω, что носитель функции φ_0 лежит строго внутри области, а носитель каждой следующей функции φ_j лежит в «граничной полоске», причем в некоторой окрестности U_j этого носителя возможен переход к координатам, выпрямляющим границу. Поэтому там можно использовать известный нам оператор Хестенса для полупространства, указанный в (3.1.5); обозначим его через $\mathcal{E}_N^{(j)}$. Пусть еще ψ_j при каждом $j=1, \ldots, m$ — бесконечно гладкая функция с носителем в U_j, равная 1 в меньшей окрестности носителя функции φ_j. Полагаем

$$\mathcal{E}_N u = \varphi_0 u + \sum_{j=1}^{m} \psi_j \mathcal{E}_N^{(j)}(\varphi_j u), \tag{5.1.5}$$

где справа подразумевается возвращение к исходным координатам.

Теорема 5.1.2. *Оператор $\mathcal{E}_N$ действует ограниченным образом из $H^s(\Omega)$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$ при $0 \leqslant s \leqslant N$ и переводит любую функцию u из первого пространства в такую функцию из второго пространства, что ее сужение на Ω совпадает с u.*

Если вместо оператора Хестенса $\mathcal{E}_N^{(j)}$ использовать универсальный оператор продолжения Рычкова для полупространства, то получается универсальный оператор продолжения для области Ω:

$$\mathcal{E} u = \varphi_0 u + \sum_{j=1}^{m} \psi_j \mathcal{E}^{(j)}(\varphi_j u). \tag{5.1.6}$$

Теорема 5.1.3. *Оператор $\mathcal{E}$ действует ограниченным образом из $H^s(\Omega)$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$ при любом вещественном s и переводит любую функцию u из первого пространства в такую функцию из второго пространства, что ее сужение на Ω совпадает с u.*

На самом деле у Рычкова построен универсальный оператор продолжения для областей с очень общей — липшицевой границей, не требующий ее выпрямления. Кроме того, он используется для более общих пространств. Все это будет обсуждаться в § 10 и § 14.

Естественно определяются и все нужные пространства в $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, начиная с $C_b^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$. Читатель без труда сформулирует эти определения самостоятельно и перенесет на эти пространства дальнейшие утверждения (кроме утверждений о компактности). Эта неограниченная область $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ имеет компактную границу. Мы не будем рассматривать более общие неограниченные области, чем только что указанные и $\mathbb{R}^n_\pm$.

Конечно, можно было бы рассматривать и более общие неограниченные области и некомпактные многообразия. Но книга ориентирована на построение теории эллиптических уравнений и граничных задач на компактных многообразиях и в ограниченных областях, поэтому мы хотим избежать рассмотрения вопросов, связанных с условиями для функций на бесконечности, а главное, с поведением границ в окрестности бесконечности и изучением весовых пространств, часто естественных в неограниченных областях и на некомпактных многообразиях.

Дальнейшие свойства пространств $H^s(\Omega)$ в основном следуют из их первого определения и аналогичных свойств пространств $H^s(\mathbb{R}^n)$ или $H^s(\mathbb{R}^n_+)$.

1. *При $s<\sigma$ пространство $H^\sigma(\Omega)$ непрерывно, компактно и плотно вложено в $H^s(\Omega)$. Пространство $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно во всех $H^s(\Omega)$.*

Компактность здесь выводится из теоремы 1.12.1.

2. *При целом $m>0$ пространство $H^{-m}(\Omega)$ состоит из линейных комбинаций производных в смысле обобщенных функций в Ω от функций из $L_2(\Omega)$.*

3. Теорема 5.1.4. *При $s>n/2+t$, где $t>0$, пространство $H^s(\Omega)$ непрерывно и компактно вложено в пространство $C^t(\overline{\Omega})$. При $s=$ $=n/2+t$ это также верно, если t — нецелое число.*

Подразумевается возможность исправления функций на множестве нулевой меры.

Теорема 5.1.5. *При $n/2>s$ и*

$$s\geqslant \frac{n}{2}-\frac{n}{p},\quad 2<p<\infty, \tag{5.1.7}$$

пространство $H^s(\Omega)$ непрерывно вложено в пространство $L_p(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{L_p(\Omega)}=\Big(\int_\Omega |u(x)|^2\,dx\Big)^{1/p}. \tag{5.1.8}$$

При строгом неравенстве для s в (5.1.7) *вложение компактно.*

4. *При $0<s<\sigma$ для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число C_ε, что для функций $u\in H^\sigma(\Omega)$ выполняется неравенство*

$$\|u\|_{H^s(\Omega)}\leqslant \varepsilon\|u\|_{H^\sigma(\Omega)}+C_\varepsilon\|u\|_{L_2(\Omega)}. \tag{5.1.9}$$

5. Теорема 5.1.6. *Пусть m — целое неотрицательное число. Если функция $a(x)$ принадлежит $C_b^{m,1}(\overline{\Omega})$, то оператор умножения на нее ограничен в $H^{m+1}(\Omega)$. При $s=m+\theta$, $0<\theta<1$, оператор умножения на функцию $a(x)$ ограничен в $H^s(\Omega)$, если она принадлежит пространству $C_b^{m+\vartheta}(\overline{\Omega})=C_b^{m,\vartheta}(\overline{\Omega})$, где $\vartheta\in(\theta,1)$.*

Замечание. По двойственности отсюда получаются такие же утверждения о мультипликаторах в пространствах $\widetilde{H}^{-s}(\Omega)$, определяемых немного ниже (см. теорему 5.1.12).

6. Сформулируем теоремы о граничных значениях.

Теорема 5.1.7. *Если $s>1/2$, то определен ограниченный оператор перехода от функции u из $H^s(\Omega)$ к ее граничному значению $v=\gamma^+u$ в $H^{s-1/2}(\Gamma)$, совпадающему в случае непрерывной функции с ее обычным граничным значением.*

Как и раньше, проверяется сначала неравенство

$$\|v\|_{H^{s-1/2}(\Gamma)}\leqslant C\|u\|_{H^s(\Omega)} \tag{5.1.10}$$

для гладких функций; оно позволяет корректно определить граничное значение для функций из $H^s(\Omega)$ и распространить на них это неравенство.

Теорема 5.1.8. *Существует не зависящий от s линейный оператор, действующий при $s\geqslant 1/2$ ограниченным образом из $H^{s-1/2}(\Gamma)$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$, который при $s>1/2$ переводит любую функцию v из первого пространства в такую функцию u из второго пространства, что ее граничное значение γ^+u на Γ совпадает с v.*

Если $|\alpha|<s-1/2$, то производная $D^\alpha u(x)$ функции из $H^s(\Omega)$ имеет граничное значение в $H^{s-|\alpha|-1/2}(\Gamma)$, оператор перехода к этому граничному значению ограничен. Можно рассмотреть данные Коши. Обозначим через $\nu(x)$ единичный вектор внутренней нормали к Γ в точке x. Для бесконечно гладкой функции $u(x)$ в $\overline{\Omega}$ можно определить последовательные производные по нормали порядка k на границе, $k=0,1$ и т. д.; это и есть данные Коши. Производная порядка k по нормали есть линейная комбинация производных порядка до k включительно в исходных координатах с бесконечно гладкими коэффициентами. Поэтому справедлив аналог теоремы 3.3.2:

Теорема 5.1.9. *При натуральном $l<s-1/2$ для функции из $H^s(\Omega)$ определены ее данные Коши $\partial_\nu^k u$ $(k=0,\ldots,l)$ порядка l на Γ, и оператор перехода к набору этих данных Коши действует огра-*

ниченным образом из этого пространства в прямое произведение пространств $H^{s-k-1/2}(\Gamma)$.

В принципе возможно построение функции с заданными данными Коши на неплоской границе, но явное построение уже не столь прозрачно, и мы не будем здесь на этом останавливаться. Существование такой функции следует из простого результата теории эллиптических уравнений высокого порядка — разрешимости подходящей задачи Дирихле. Мы поясним это в п. 7.1 (см. там задачу 3).

7. Теорема 5.1.10. *При* $|s| < 1/2$ *оператор* $\mathcal{E}_0$ *продолжения нулем действует ограниченным образом из* $H^s(\Omega)$ *в* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *(и из* $H^s(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ *в* $H^s(\mathbb{R}^n)$*).*

8. Функции $u^{\pm}(x)$ из $H^s(\Omega)$ и $H^s(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ при $0 < s < 1/2$ «склеиваются» в одну функцию из $H^s(\mathbb{R}^n)$. При не полуцелом $s > 1/2$ это тоже верно, если они имеют на Γ одинаковые данные Коши порядка $[s - 1/2]$.

Перейдем к аналогам определений и результатов из §§ 3 и 4. Введем *пространство* $\widetilde{H}^s(\Omega)$. Для любого $s \in \mathbb{R}$ это подпространство в $H^s(\mathbb{R}^n)$, состоящее из элементов с носителями в $\overline{\Omega}$, с нормой, которая берется из этого пространства. Эквивалентное определение — пополнение линеала функций из $C_0^\infty(\Omega)$, продолженных нулем вне Ω, в $H^s(\mathbb{R}^n)$. Его можно определить также как множество функций из $H^s(\Omega)$, продолжения которых нулем принадлежат $H^s(\mathbb{R}^n)$, но норма берется из последнего пространства. Аналогично определяется $\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$.

Теорема 5.1.11. *При* $|s| < 1/2$ *пространства* $H^s(\Omega)$ *и* $\widetilde{H}^s(\Omega)$ *можно отождествить, пользуясь ограниченностью из* $H^s(\Omega)$ *в* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *при этих* s *оператора продолжения нулем*; *нормы эквивалентны.*

Пространство $H^s(\Omega)$ является фактор-пространством:

$$H^s(\Omega) = H^s(\mathbb{R}^n)/\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}).$$

Теорема 5.1.12. *Пространства* $H^s(\Omega)$ *и* $\widetilde{H}^{-s}(\Omega)$ *взаимно сопряжены относительно продолжения стандартного скалярного произведения в* $L_2(\Omega)$ *на прямое произведение этих пространств.*

Точнее, это форма

$$(u_1, u_2)_\Omega = \lim_{k\to\infty} (v_1, \psi_k)_{\mathbb{R}^n} = \lim_{k\to\infty} (\varphi_k, \psi_k)_\Omega, \tag{5.1.11}$$

где v_1 — продолжение функции u_1 из $H^s(\Omega)$ до функции из $H^s(\mathbb{R}^n)$, $\{\psi_k\}$ — сходящаяся к u_2 в пространстве $\widetilde{H}^{-s}(\Omega)$ последовательность функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителями, лежащими внутри Ω, и $\{\varphi_k\}$ — последовательность функций из $C^\infty(\overline{\Omega})$, сходящаяся к u_1 в $H^s(\Omega)$. С использованием универсального оператора продолжения можно написать

$$(u_1, u_2)_\Omega = (\mathscr{E}u_1, u_2)_\Omega. \tag{5.1.12}$$

Теорема 5.1.13. *Подпространство элементов из $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ с носителями на Γ при $s \leqslant 1/2$ состоит из одного нуля, а при $s > 1/2$ — из обобщенных функций вида*

$$f = \sum_{0 \leqslant j < s-1/2} g_j \otimes \delta^{(j)}(t), \quad \text{где } g_j \in H^{-s+j+1/2}(\Gamma), \tag{5.1.13}$$

а $\delta^{(j)}(t)$ — обобщенная функция, действующая на гладкие основные функции $u(x)$ по формуле

$$\langle \delta^{(j)}, u \rangle = (-1)^j \partial_\nu^j u(x)|_\Gamma.$$

Обобщенные функции (5.1.12) лежат в $\widetilde{H}^{-s}(\Omega)$ и как функционалы на $H^s(\Omega)$ действуют на граничные значения функций из этого пространства. Например, для функций u из $H^{1+\sigma}(\Omega)$, $|\sigma| < 1/2$, соответствующие антилинейные функционалы имеют вид $(g, u^+)_\Gamma$, где $g \in H^{-1/2-\sigma}(\Gamma)$.

Пространство $\mathring{H}^s(\Omega)$ при любом $s \in \mathbb{R}$ определяется как замыкание в $H^s(\Omega)$ линеала $C_0^\infty(\Omega)$.

Теорема 5.1.14. *Пространство $\mathring{H}^s(\Omega)$ совпадает с $H^s(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $s \leqslant 1/2$. При $s > 1/2$ оно совпадает с подпространством функций в $H^s(\Omega)$, имеющих нулевые данные Коши порядка меньше $s - 1/2$.*

Теорема 5.1.15. *При $s > 0$ пространства $\widetilde{H}^s(\Omega)$ и $\mathring{H}^s(\Omega)$ можно отождествить* (*считаем элементы второго продолженными нулем*), *если s не полуцелое*; *соответствующие нормы эквивалентны.*

При полуцелом s первое из этих подпространств непрерывно вкладывается во второе.

Пусть $s > 1/2$. Можно считать, что пространство $\widetilde{H}^{-s}(\Omega)$ состоит из непрерывных антилинейных функционалов на $H^s(\Omega)$. Их сужения на $\widetilde{H}^s(\Omega)$ образуют пространство $H^{-s}(\Omega)$. И наоборот, каждый непрерывный антилинейный функционал на $\widetilde{H}^s(\Omega)$ продолжается до непрерывного антилинейного функционала на $H^s(\Omega)$ по теореме Хана—Банаха. Договоримся, например, считать, что все функционалы на $\widetilde{H}^s(\Omega)$ продолжаются нулем на ортогональное дополнение к $\widetilde{H}^s(\Omega)$ в $H^s(\Omega)$. Тогда получим включение

$$\widetilde{H}^{-s}(\Omega) \supset H^{-s}(\Omega). \tag{5.1.14}$$

Это включение строгое, так как левое пространство содержит еще функционалы на $H^s(\Omega)$, сосредоточенные на Γ.

Структура последних видна из сказанного в пп. 4.3—4.4. Это суммы

$$\sum_{0\leqslant j<s-1/2} (h_j, \partial_\nu^j u^+)_\Gamma, \tag{5.1.15}$$

где $h_j \in H^{-s+j+1/2}(\Gamma)$ и $\partial_\nu^j u^+$ — след на Γ производной по нормали порядка j от функции u.

5.2. Теперь рассмотрим пространства $H^s(M)$ на n-мерном бесконечно гладком многообразии M с бесконечно гладким краем. Его внутренние точки имеют координатные окрестности, которые лежат внутри M и в которых возможно введение локальных координат таким же образом, как на многообразии без края. Эти окрестности диффеоморфны открытому шару в $\mathbb{R}^n$. Точки края ∂M имеют координатные «полуокрестности», диффеоморфные объединению открытого полушара с плоской частью его границы. В такой полуокрестности возможно введение локальных координат $x = (x', x_n)$, в которых $x_n \geqslant 0$ и $|x| < 1$. Точки с координатами $(x', 0)$ лежат на ∂M, остальные точки являются внутренними на M. Все преобразования локальных координат в пересечениях любых двух окрестностей и полуокрестностей являются невырожденными и бесконечно гладкими. Ввиду компактности замыкание $\overline{M}$ многообразия допускает конечное покрытие такими окрестностями и полуокрестностями. Строится конечное разбиение единицы на $\overline{M}$, состоящее из бесконечно гладких функций и подчиненное этому покрытию. Это позволяет ввести обычным образом нормы в $H^s(M)$ через аналогичные нормы в пространстве $\mathbb{R}^n$ и полупространстве $\mathbb{R}^n_+$. Если изменить покрытие, разбиение единицы или локальные координаты, то норма переходит в эквивалентную.

Далее, обычно можно предполагать, что M является частью замкнутого бесконечно гладкого многообразия M_0 той же размерности. При этом граничные координатные полуокрестности оказываются частями координатных окрестностей на M_0. Поэтому можно говорить о продолжении функции из $H^s(M)$ до функции из $H^s(M_0)$.

В частности, $\widetilde{H}^s(M)$ определяется тогда как подпространство элементов из $H^s(M_0)$ с носителями в $\overline{M}$.

В остальном свойства пространств $H^s(M)$ на гладком многообразии с гладким краем совершенно аналогичны свойствам пространств $H^s(\Omega)$ в ограниченной области с гладкой границей, и мы не будем заново приводить формулировки.

Глава II

Эллиптические уравнения и эллиптические граничные задачи

В этой главе мы докажем основные теоремы общей теории «гладких» эллиптических уравнений и задач. Общность несколько минимизирована: в частности, подробно мы рассматриваем скалярные уравнения и задачи. Более общие факты (с аналогичными доказательствами) будут сформулированы или отмечены. Мы не пользуемся в этой главе псевдодифференциальными операторами: их теория будет подвергнута некоторой ревизии и построена в [3], и там материал настоящей главы будет существенно дополнен.

В § 6 основные идеи общей теории объясняются в случае скалярного эллиптического уравнения в частных производных на замкнутом бесконечно гладком многообразии. Это случай, когда нет граничных условий. Частный случай — уравнение (фактически на торе) с периодическими граничными условиями. Коэффициенты уравнения предполагаются бесконечно гладкими.

Основные теоремы — об эквивалентности эллиптичности и фредгольмовости в пространствах H^s, о гладкости решений при гладкой правой части и об однозначной разрешимости при условии эллиптичности с параметром (мы ограничиваемся случаем линейного вхождения параметра в уравнение). В доказательствах используется метод замораживания коэффициентов. Необходимый материал, относящийся к абстрактным фредгольмовым операторам, вынесен в § 17, п. 17.1. В частности, там приведены все нужные определения.

В § 7 такие же теоремы доказываются для общих скалярных задач в ограниченной области с бесконечно гладкой границей. Добавим, что в этих двух параграфах намечено объяснение содержания спектральной теории эллиптических уравнений и задач. Предварительный материал, относящийся к абстрактным понятиям спектральной теории, тоже вынесен в § 17, п. 17.3.

Формулируются аналоги основных теорем для матричных уравнений и задач.

§ 8 посвящен основным вариационным граничным задачам — Дирихле и Неймана — сначала для сильно эллиптического уравнения 2-го порядка. Затем кратко описываются обобщения на системы высших порядков. Эти задачи, имеющие намного более продолжительную историю, особенно близки к приложениям.

Соболевские пространства очень полезны и в теории параболических и гиперболических уравнений и задач; параболические задачи будут упомянуты в п. 7.1, а гиперболические задачи — за рамками нашей книги.

§ 6. Эллиптические уравнения на замкнутом гладком многообразии

6.1. Определения. Напомним некоторые понятия, которые уже затрагивались в [2]. Рассмотрим сначала линейный оператор в частных производных в $\mathbb{R}^n$ порядка m

$$Au(x) = a(x, D)u(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x). \qquad (6.1.1)$$

Здесь $u(x)$ — скалярная функция. Его коэффициенты — комплекснозначные, вообще говоря, функции; мы предположим их бесконечно гладкими и равномерно ограниченными со всеми производными:

$$|D^\beta a_\alpha(x)| \leqslant C_{\alpha,\beta}. \qquad (6.1.2)$$

Мы знаем, что такой оператор действует ограниченным образом из $H^s(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ при всех $s \in \mathbb{R}$:

$$\|Au\|_{H^{s-m}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_s \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}. \qquad (6.1.3)$$

Его *символом* называется многочлен $a(x, \xi)$, получаемый из $a(x, D)$ заменой D_j вещественными числами ξ_j. *Главным символом* $a_0(x, \xi)$ называется старшая однородная часть символа:

$$a_0(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha. \qquad (6.1.4)$$

До того как стал общепринятым термин «главный символ», использовался термин *характеристический многочлен*.

Оператор A называется *эллиптическим в точке* x, если

$$a_0(x, \xi) \neq 0 \quad (0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n); \qquad (6.1.5)$$

эллиптическим на множестве X, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, если он эллиптичен в каждой точке $x \in X$, и *равномерно эллиптическим на* X, если с некоторой положительной постоянной C

$$|a_0(x, \xi)| \geqslant C|\xi|^m \tag{6.1.6}$$

при всех $x \in X$. Например, оператор Лапласа

$$\Delta = -(D_1^2 + \ldots + D_n^2) \tag{6.1.7}$$

равномерно эллиптичен на $\mathbb{R}^n$. Если X — компактное (т. е. ограниченное замкнутое) множество, то эллиптический на X оператор автоматически равномерно эллиптичен на X, так как неравенство вида (6.1.6) с единой постоянной по непрерывности верно на компактном множестве точек (x, ξ) с $x \in X$, $|\xi| = 1$.

Вместо того чтобы говорить об эллиптичности оператора A, можно говорить об эллиптичности уравнения $Au = f$.

Теперь определим эллиптичность с параметром. Пусть Λ — замкнутый угол (сектор) на комплексной плоскости с вершиной в начале координат; например, это может быть луч, выходящий из начала координат (и содержащий его). Оператор A называется *эллиптическим с параметром в* Λ *в точке* x, если

$$a_0(x, \xi) - \lambda \neq 0 \quad (|\xi| + |\lambda| \neq 0,\ \lambda \in \Lambda); \tag{6.1.8}$$

эллиптическим с параметром в Λ на множестве X, если условие (6.1.8) выполнено в каждой точке $x \in X$, и *равномерно эллиптическим с параметром в* Λ *на* X, если с некоторой положительной постоянной C

$$|a_0(x, \xi) - \lambda| \geqslant C(|\xi|^m + |\lambda|) \tag{6.1.9}$$

при $x \in X$, $\lambda \in \Lambda$. Например, оператор $-\Delta$ равномерно эллиптичен с параметром на $\mathbb{R}^n$ в любом замкнутом угле с вершиной в начале координат, не содержащем положительную полуось.

Очевидно, что эллиптичность всегда следует из эллиптичности с параметром: достаточно в определении последней положить $\lambda = 0$.

Эллиптическим с параметром в описанной ситуации можно называть и оператор $A - \lambda I$ вместо A.

Замечание 6.1.1. Из эллиптичности оператора A очевидным образом следует, что *коэффициенты в нем при всех старших производных* D_j^m *отличны от нуля*. Действительно, это видно из условия (6.1.5) с векторами ξ, у которых одна координата равна 1, а остальные — нулю.

Далее, *при $n>2$ из эллиптичности следует четность порядка m*. Действительно, рассмотрим, например, уравнение

$$a_0(x, \xi', \zeta) = 0 \tag{6.1.10}$$

относительно ζ; здесь ζ стоит вместо ξ_n. Его корни при вещественном $\xi' \neq 0$ в силу условия эллиптичности невещественны. Если $n>2$, то из точки $\xi' \neq 0$ можно непрерывно пройти по гиперплоскости $\xi_n = 0$ в точку $-\xi'$, не проходя через начало координат. При этом число корней ζ в верхней и в нижней полуплоскости сохраняется, и это *одинаковые числа*, так как при замене ξ' на $-\xi'$ корни ζ переходят в корни $-\zeta$.

Если оператор эллиптичен с параметром, то совпадение корней в верхней и нижней полуплоскости и четность получаются аналогично и при $n=2$, так как из точки $(\xi', 0) \neq 0$ в $\mathbb{R}^2 \times \Lambda$, $\xi \neq 0$, можно пройти в $(-\xi', 0)$, не проходя через точку $(0, 0)$.

Если m четно, то будем писать $2l$ вместо m.

Перейдем теперь к оператору A в частных производных порядка m на замкнутом многообразии M. Он допускает запись (6.1.1), вообще говоря, только локально, в локальных координатах. Удобное исключение — стандартный тор $\mathbb{T}^n = [0, 2\pi]^n$, на нем можно пользоваться едиными 2π-периодическими координатами $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Если коэффициенты оператора A бесконечно гладкие, то он действует ограниченным образом из $H^s(M)$ в $H^{s-m}(M)$ при всех s.

Разобравшись в поведении главного символа $a_0(x, \xi)$ при преобразованиях координат, можно показать, что он имеет глобальный смысл как функция на кокасательном расслоении T^*M. (Подробнее об этом мы будем говорить в [3].) Поэтому на многообразии содержательны определения эллиптичности и эллиптичности с параметром; сейчас мы сразу говорим об эллиптичности и эллиптичности с параметром всюду. Автоматически они оказываются равномерными ввиду компактности многообразия.

Классический пример эллиптического оператора на многообразии — оператор Бельтрами—Лапласа Δ на римановом многообразии M. Напомним формулу для него. Если метрика локально записана в виде $ds^2 = \sum g_{j,k}\, dx_j\, dx_k$, где $g_{j,k} = g_{k,j}$, $(g^{j,k})$ — матрица, обратная к $(g_{j,k})$, и g — определитель последней матрицы, то

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum \partial_j(\sqrt{g}\, g^{j,k} \partial_k). \tag{6.1.11}$$

Основные утверждения, на которых строится теория эллиптических операторов на замкнутом многообразии, состоят в том, что эллиптичность оператора A равносильна его фредгольмовости (в частности, наличию параметрикса, см. п. 17.1) как оператора из $H^s(M)$ в $H^{s-m}(M)$ при всех s, а эллиптичность с параметром в Λ — обратимости оператора $A - \lambda I$ при достаточно больших по модулю значениях параметра $\lambda \in \Lambda$. Кое-что получается и для равномерно эллиптических операторов в $\mathbb{R}^n$, но эквивалентности с фредгольмовостью или обратимостью там в общем случае нет. Причина этой разницы состоит в том, что при $s_1 < s_2$ пространство $H^{s_2}(M)$ вложено в $H^{s_1}(M)$ компактно (см. теорему 2.3.1), а для $\mathbb{R}^n$ вместо M это неверно.

6.2. Основные теоремы. Пусть A — оператор в частных производных на M порядка m с бесконечно гладкими коэффициентами.

Теорема 6.2.1. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1°. *Оператор A эллиптичен на M.*

2°. *Это фредгольмов оператор из $H^s(M)$ в $H^{s-m}(M)$ при всех s.*

3°. *Оператор A обладает двусторонним параметриксом B, действующим ограниченным образом из $H^{s-m}(M)$ в $H^s(M)$ и таким, что $T_1 = BA - I$ и $T_2 = AB - I$ — ограниченные операторы из $H^s(M)$ в $H^{s+1}(M)$ при всех s.*

4°. *Справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_{H^s(M)} \leqslant C_s(\|Au\|_{H^{s-m}(M)} + \|u\|_{H^{s-1}(M)}) \tag{6.2.1}$$

с постоянной, не зависящей от u.

Наиболее важна здесь эквивалентность утверждений 1° и 2°, а доказательство обычно проводится по схеме

$$1° \Rightarrow 3° \Rightarrow 2° \Rightarrow 4° \Rightarrow 1°. \tag{6.2.2}$$

По сравнению с абстрактной ситуацией в п. 17.1 здесь мы добавочно имеем *шкалы* пространств $X_s = H^s(M)$ и $Y_s = H^{s-m}(M)$, вторая из первой получается сдвигом индекса. Параметрикс обладает более сильным свойством, чем в абстрактном случае: операторы T_1 и T_2 являются сглаживающими, т. е. повышают гладкость — переводят функцию из $H^s(M)$ в $H^{s+1}(M)$ (в частности, компактны в каждом $H^s(M)$). Такой параметрикс будем называть *квалифицированным*.

Отметим еще, что априорная оценка оказывается *двусторонней*: правая часть оценивается через левую. Это говорит об адекватности пространств H^s рассматриваемым операторам.

Как отмечено в предложении 17.1.6, если ядро тривиально, то в правой части оценки можно опустить слагаемое $\|u\|_{s-1}$. В общем случае эту норму можно заменить нормой любого порядка, меньшего m.

В [3] аналогичная теорема будет выведена для более общих — псевдодифференциальных эллиптических операторов средствами *исчисления* этих операторов, которое будет предварительно построено. Вся аналитическая работа концентрируется в построении этого исчисления. А сейчас мы хотим наметить доказательство классическим методом в теории эллиптических уравнений, разработанным задолго до этого исчисления. Его основные моменты — локализация с использованием разбиения единицы на M и «замораживание коэффициентов». Его называют *методом замораживания коэффициентов.*

Доказательство теоремы 6.2.1. Проверим, что $1^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Проведем подробно построение правого параметрикса.

Этап 1. Рассмотрим оператор A в $\mathbb{R}^n$. Отбросим в нем младшие члены и заморозим коэффициенты в фиксированной точке x_0. Теперь это однородный оператор с постоянными коэффициентами:

$$A_0 = a_0(x_0, D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha. \tag{6.2.3}$$

Положим

$$B_0 = F^{-1} \frac{|\xi|^m}{(|\xi|^m + 1) a_0(x_0, \xi)} F, \tag{6.2.4}$$

где F — преобразование Фурье в смысле обобщенных функций. Назначение числителя — погасить особенность знаменателя в начале координат. Дробь $|\xi|^m/(|\xi|^m + 1)$ стремится к 1 при $|\xi| \to \infty$. Очевидно, что $A_0 B_0 = I + T_0$, где

$$T_0 = -F^{-1} \frac{1}{|\xi|^m + 1} F$$

— сглаживающий оператор, он повышает гладкость даже на m единиц — действует ограниченным образом из $H^s(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s+m}(\mathbb{R}^n)$. В $H^s(\mathbb{R}^n)$ он, конечно, не компактен, но это и не требуется. Оператор B_0 назовем *квазипараметриксом* для A_0.

Этап 2. Рассматривается оператор $a(x, D)$ в $\mathbb{R}^n$ с произвольными младшими членами (порядка меньше m) и старшими коэффициентами, близкими к постоянным — их значениям в точке x_0. Запишем его в виде

$$a(x, D) = a_0(x_0, D) + a_1(x, D) + a_2(x, D), \tag{6.2.5}$$

где $a_1(x,D)$ — сумма младших членов оператора $a(x,D)$, а $a_2(x,D)$ получается из старшей части оператора $a(x,D)$ вычитанием из нее $a_0(x_0,D)$. Сейчас мы покажем, что

$$a(x,D)B_0 = I + T_1 + T_2, \tag{6.2.6}$$

где T_1 — снова сглаживающий оператор, а T_2 — оператор с нормой меньше 1 при фиксированном s, если старшие коэффициенты в $a(x,D)$ достаточно близки к их значениям в точке x_0. Тогда $I+T_2$ — обратимый оператор, и нужный квазипараметрикс для $a(x,D)$ получается в виде

$$B_0(I+T_2)^{-1}. \tag{6.2.7}$$

Проверим утверждение о правой части в (6.2.6). Как мы видели, $a_0(x_0,D)B_0$ — сумма единичного и сглаживающего оператора. Что же касается $a_2(x,D)B_0$, то этот оператор состоит из произведений коэффициентов в $a_2(x,D)$ (с малыми верхними гранями модулей) и операторов нулевого порядка. В силу следствия 1.9.4 этот оператор разлагается в сумму сглаживающего оператора и оператора T_2 с малой нормой, если коэффициенты в $a_2(x,D)$ достаточно близки к нулевым. Все сглаживающие слагаемые собираем в T_1. Итак, получается квазипараметрикс (6.2.7).

Этап 3. На многообразии берутся две системы бесконечно гладких функций: $\{\varphi_j(x)\}$ и $\{\psi_j(x)\}$. Первая — достаточно мелкое конечное разбиение единицы $\sum\varphi_j = 1$. Вторая состоит из таких функций $\psi_j(x)$, что $\psi_j(x) = 1$ в окрестности носителя функции φ_j и носитель функции ψ_j лежит в некоторой координатной окрестности U_j на M. Оператор A можно записать в виде

$$A = \sum \psi_j A \varphi_j \cdot. \tag{6.2.8}$$

Предположим, что в j-м слагаемом можно перейти к локальным координатам и заменить оператор A эллиптическим оператором A_j в $\mathbb{R}^n$ с близкими к постоянным старшими коэффициентами, имеющим квазипараметрикс B_j (построенный на этапе 2). Итак,

$$A = \sum \psi_j A_j \varphi_j \cdot. \tag{6.2.9}$$

Теперь построим правый параметрикс для A в виде

$$B = \sum \varphi_k B_k \psi_k \cdot. \tag{6.2.10}$$

Очевидно, что

$$ABf = \sum \psi_j A_j \varphi_j \varphi_k B_k \psi_k f. \tag{6.2.11}$$

Здесь отличны от нуля только слагаемые, в которых $\varphi_j\varphi_k \neq 0$. В них мы в записи оператора A в виде A_j перейдем к его записи в виде A_k. Это возможно, если носители функций φ_j достаточно малы. Коммутатор $A_k(\varphi_j\varphi_k) - (\varphi_j\varphi_k)A_k$ — оператор в частных производных порядка не выше $m-1$. Получаем равенство

$$ABf = \sum \varphi_j\varphi_k f + Tf = f + Tf,$$

где T — оператор, повышающий гладкость функций из $H^{s-m}(M)$ на единицу и потому компактный в $H^{s-m}(M)$. Мы достигли цели.

Это построение на самом деле проводится сразу для s из промежутка конечной, но сколь угодно большой длины (это чуть меньше, чем обещано в формулировке теоремы; что она все-таки верна, будет показано в [3]).

Аналогично строится левый параметрикс, нужны только очевидные перестановки в написанных выше формулах. Читателю рекомендуется провести построение левого параметрикса самостоятельно. Оба они оказываются двусторонними параметриксами (см. предложение 17.1.4).

$3^\circ \Rightarrow 2^\circ \Rightarrow 4^\circ$. См. предложения 17.1.3 и 17.1.6.

Импликация $4^\circ \Rightarrow 1^\circ$ проверяется от противного. Пусть эллиптичность нарушается в некоторой точке (x_0, ξ_0) кокасательного расслоения, $\xi_0 \neq 0$. Тогда априорная оценка оказывается неверной — опровергается подстановкой в нее функции $\varphi(x)\exp(\lambda x \cdot \xi_0)$ в локальных координатах, где φ — гладкая функция с малым носителем, содержащим x_0, равная 1 вблизи этой точки, а λ — положительный параметр, который устремляется к бесконечности. После сокращения на экспоненту получается, что при достаточно малом носителе функции φ левая часть растет несколько быстрее, чем правая. Предоставляем читателю убедиться в этом. □

Индекс эллиптического оператора не зависит от s. Это мы объясним в п. 6.3.

Замечание 6.2.2. Возможны следующие изменения в доказательстве. Вместо построения левого параметрикса выводится априорная оценка (тоже в три этапа), из нее тоже следует конечномерность ядра и замкнутость области значений — см. предложение 17.1.7.

Теорема 6.2.3. *Пусть оператор A эллиптичен и $Au = f$, где $u \in H^s(M)$, но $f \in H^{s-m+\tau}(M)$, где $\tau > 0$. Тогда $u \in H^{s+\tau}(M)$.*

Это *теорема о регулярности решений, или о повышении их гладкости.* Доказывается она применением параметрикса к нашему уравнению слева:

$$BAu = u + Tu = Bf. \tag{6.2.12}$$

Отсюда видно, что $u \in H^{\min(s+1,s+\tau)}(M)$, а если $\tau > 1$, то параметрикс используется повторно нужное число раз.

Следствие 6.2.4. *Ядро* $\operatorname{Ker} A$ *эллиптического оператора на* M *в любом пространстве* $H^s(M)$ *состоит из бесконечно гладких функций и поэтому не зависит от* s.

Добавим, что есть локальный вариант теоремы 6.2.3: если правая часть имеет повышенную гладкость в некоторой области на многообразии, то и решение имеет там соответствующую повышенную гладкость. Для доказательства надо подействовать параметриксом слева на равенство

$$A\psi u = (A\psi u - \psi Au) + \psi f,$$

где ψ — гладкая функция с носителем в этой области, равная 1 в меньшей подобласти.

Теорема 6.2.5. *Пусть оператор* A *на* M *эллиптичен с параметром в угле* Λ. *Тогда уравнение*

$$(A - \lambda)u = f \tag{6.2.13}$$

с $f \in H^0(M)$ *однозначно разрешимо в* $H^m(M)$ *при достаточно больших по модулю* $\lambda \in \Lambda$: $|\lambda| \geqslant \lambda_0$. *При этом справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_{H^m(M)} + |\lambda| \|u\|_{H^0(M)} \leqslant C\|f\|_{H^0(M)} \tag{6.2.14}$$

с постоянной, не зависящей и от параметра λ. *Условие эллиптичности с параметром необходимо для справедливости такой оценки.*

Для простоты мы привели формулировку только при $s = m$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 6.2.1, но проще. Решение надо рассматривать в зависящей от параметра норме $|||u|||_{H^m(M)}$, равной левой части в (6.2.14). Уже на первом этапе строится не квазипараметрикс, а обратный оператор в виде

$$B_0 = F^{-1} \frac{1}{a_0(x_0, \xi) - \lambda} F, \tag{6.2.15}$$

достаточно $\lambda \in \Lambda$ считать отличным от нуля. На втором этапе тоже получается правый обратный оператор при достаточно большом по модулю λ. Еще бо́льшим его надо брать на третьем этапе, и снова получается правый обратный оператор. $\square$

При остальных λ получается фредгольмовость уравнения с нулевым индексом.

6.3. Сопряженные операторы. Пусть $(u, v)_M$ — скалярное произведение в $L_2(M)$, и пусть дифференциальные операторы A и A^* порядка m связаны формулой

$$(Au, v)_M = (u, A^* v)_M \tag{6.3.1}$$

на бесконечно гладких функциях. Тогда они называются *формально сопряженными*, а если $A = A^*$, то это *формально самосопряженный оператор*. Например, оператор Бельтрами—Лапласа на римановом многообразии — формально самосопряженный. Конечно, эта связь между A и A^* зависит от выбора скалярного произведения. Если локальные координаты согласованы с заданной на M плотностью, определяющей скалярное произведение (см. п. 2.1), то в них

$$A = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha \iff A^* = \sum_{|\alpha| \leqslant m} D^\alpha [\overline{a_\alpha(x) \cdot}]. \tag{6.3.2}$$

В частности, так обстоит дело на стандартном торе, если пользоваться периодическими координатами.

Разумеется, $A^{**} = A$.

Пусть оператор A эллиптичен. Тогда оператор A^* тоже эллиптичен, так как его главный символ — комплексно сопряженная функция к главному символу оператора A. Оба имеют конечномерные ядра, состоящие из бесконечно гладких функций. Рассмотрим A и A^* как операторы из $H^m(M)$ в $H^0(M) = L_2(M)$. Формула (6.3.1) сохраняется (переносится на функции из $H^m(M)$ предельным переходом). Это означает, что *A и A^* сопряжены как неограниченные операторы в гильбертовом пространстве $H^0(M)$* (с общей областью определения $H^m(M)$). Они имеют замкнутые области значений $R(A)$ и $R(A^*)$ в $H^0(M)$.

Предложение 6.3.1. *Справедливы соотношения*

$$H^0(M) = R(A) \oplus \operatorname{Ker} A^* = R(A^*) \oplus \operatorname{Ker} A. \tag{6.3.3}$$

Доказательство. Из (6.3.1) видно, что если функция v принадлежит $\operatorname{Ker} A^*$, то она ортогональна к $R(A)$ в $L_2(M)$. Проверим обратное утверждение. Формула (6.3.1) сохраняется также в случае, когда $u \in H^m(M)$, $v \in H^0(M)$, в этом случае мы рассматриваем A^*v в $H^{-m}(M)$, продолжая скалярное произведение справа на $H^m(M) \times \times H^{-m}(M)$. Это означает, что *$A\colon H^m(M) \to H^0(M)$ и $A^*\colon H^0(M) \to \to H^{-m}(M)$ сопряжены как операторы в банаховых пространствах* (здесь это гильбертовы пространства). Пусть функция v ортогональна к $R(A)$. Тогда $(u, A^*v)_M = 0$ для всех $u \in H^m(M)$, так что $A^*v = 0$ в $H^{-m}(M)$. Ср. с предложением 17.1.8. Но мы знаем, что ядро эллиптического оператора состоит из бесконечно гладких функций, в частности, $v \in \operatorname{Ker} A^* \subset H^m(M)$. Мы проверили первое равенство для $H^0(M)$ в (6.3.3), второе проверяется аналогично. □

Следствие 6.3.2. *Коразмерность области значений эллиптического оператора $A\colon H^m(M) \to H^0(M)$ совпадает с размерностью ядра оператора A^*, поэтому для индекса $\varkappa(A)$ оператора A справедлива формула*

$$\varkappa(A) = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Ker} A^*, \tag{6.3.4}$$

и

$$\varkappa(A^*) = -\varkappa(A). \tag{6.3.5}$$

Индекс оператора $A\colon H^s(M) \to H^{s-m}(M)$ можно теперь определить формулой (6.3.4) при всех s. Видно, что он не зависит от s.

Дополнительно отметим следующее. При любом s формула (6.3.1) сохраняется для $u \in H^s(M)$ и $v \in H^{m-s}(M)$. Это означает, что *операторы $A\colon H^s(M) \to H^{s-m}(M)$ и $A^*\colon H^{m-s}(M) \to H^{-s}(M)$ при любом s сопряжены как операторы в банаховых пространствах*. Из этой формулы снова следует, что принадлежность функции к $R(A)$ в $H^{s-m}(M)$ равносильна ее ортогональности к $\operatorname{Ker} A^*$ в смысле продолжения формы $(\cdot\,,\cdot)_M$. Значит, коразмерность области значений оператора A в $H^{s-m}(M)$ не зависит от s, так что и в смысле первоначального определения (в п. 17.1) *индекс $\varkappa(A)$ не зависит от s*. Более того, от s не зависят размерности ядер $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Ker} A^*$ — числа, разностью которых является индекс $\varkappa(A)$.

Подробнее свойства индекса мы будем обсуждать в [3]. Мы проверим, что он не зависит от младших членов оператора и гомотопически инвариантен — не меняется при непрерывном изменении коэффициентов главного символа с сохранением эллиптичности. (Ср. с предложением 17.1.12 (3).) Проблема вычисления индекса общего (матричного) эллиптического оператора была фактически поставлена в знаменитой статье И. М. Гельфанда [133]. Эта статья оказала большое влияние на развитие теории эллиптических уравнений. В частности, появилась теория эллиптических псевдодифференциальных операторов. Проблема вычисления индекса была решена в топологических терминах для операторов на замкнутом многообразии в работе Атьи и Зингера [194].

6.4. Некоторые спектральные свойства эллиптических операторов. Пусть A — эллиптический оператор порядка m на многообразии M. Рассмотрим его как неограниченный оператор в $L_2(M)$ с областью определения $H^m(M)$. Допустим, что его резольвентное множество непусто. (Необходимая предпосылка для этого — равенство индекса нулю.) Тогда это оператор с дискретным спектром, так как резольвента — ограниченный оператор из $L_2(M)$ в пространство $H^m(M)$, компактно вложенное в $L_2(M)$.

Из теоремы 6.2.3 выводится, что все корневые функции такого оператора (собственные или собственные и присоединенные функции) принадлежат всем пространствам $H^s(M)$ и, значит, являются бесконечно гладкими функциями. Они остаются корневыми функциями во всех этих пространствах.

Формально самосопряженный эллиптический оператор оказывается самосопряженным оператором в $L_2(M)$. Примером такого оператора является оператор Бельтрами—Лапласа на замкнутом римановом многообразии. Очень многие математики, начиная с Г. Вейля (1912), занимались исследованием асимптотики собственных значений самосопряженных эллиптических операторов. Если главный символ принимает положительные и отрицательные значения, то имеется бесконечно много положительных и отрицательных собственных значений λ_j. Занумеруем их в порядке неубывания с учетом кратностей. Доказано, что тогда имеют место асимптотические формулы (формулы Вейля)

$$\lambda_j \sim -c_- j^p \quad (j \to -\infty), \quad \lambda_j \sim c_+ j^p \quad (j \to +\infty), \quad p = \frac{m}{n}, \quad (6.4.1)$$

с положительными постоянными $c_\pm$. Если главный символ положителен, то число отрицательных собственных значений конечно (оператор полуограничен снизу) и остается только вторая асимптотическая формула. Мы не приводим здесь формулы для коэффициентов в этих асимптотиках. Исследовался трудный вопрос об оценке остатка в этих формулах, т. е. разности левой и правой части. Хёрмандер показал для скалярных полуограниченных снизу операторов (см. [167]), что оптимальная в общем случае оценка имеет вид $O(j^{(m-1)/n})$; известны достаточные условия для некоторого улучшения этой оценки.

Из собственных функций самосопряженного эллиптического оператора составляется ортонормированный базис $\{e_j\}$ в пространстве $L_2(M)$. Любая функция $f\in L_2(M)$ разлагается в ряд

$$f=\sum c_j e_j, \quad c_j=(f,e_j)_M, \tag{6.4.2}$$

безусловно сходящийся по норме в этом пространстве. Но собственные функции принадлежат всем $H^s(M)$ и с учетом изоморфизмов составляют безусловный базис во всех этих пространствах. Поэтому при $f\in H^s(M)$ ряд безусловно сходится в $H^s(M)$.

Эллиптический оператор порядка m, *близкий к самосопряженному*, — это оператор, отличающийся от самосопряженного на слагаемое порядка не выше $m-1$. Система его корневых функций полна в $L_2(M)$ в силу предложения 17.3.1, если главный символ положителен, и как следствие полна во всех $H^s(M)$. Предложение 17.3.2 тоже применимо к несамосопряженным эллиптическим операторам — с $p=m/n$.

Направления максимально быстрого убывания нормы резольвенты — это в точности направления эллиптичности с параметром (если они есть).

Подробно спектральные свойства эллиптических операторов предполагается обсуждать в [3].

Самосопряженный оператор $-\Delta+1$ на римановом многообразии имеет положительные собственные значения. Поэтому определены его вещественные степени $(-\Delta+1)^t$. В [3] мы увидим, что этот оператор изоморфно отображает $H^s(M)$ на $H^{s-2t}(M)$ при любых s и t. Впрочем, это можно проверить и средствами теории интерполяции, см. п. 13.8а.

6.5. Некоторые обобщения. Здесь мы только перечислим некоторые возможные обобщения теории эллиптических операторов, не вдаваясь в подробности.

1. Теория обобщается на *матричные* операторы, действующие на вектор-функции. Проще всего это делается, если старшие части во всех элементах матрицы

$$a(x,D)=(a_{j,k}(x,D)) \tag{6.5.1}$$

считать имеющими один и тот же порядок m. Тогда из символов этих старших частей составляется (матричный) главный символ $a_0(x,\xi)$. Некоторые его элементы могут оказаться нулями. Условие эллиптичности оператора (6.5.1) состоит в том, что определитель главного символа не обращается в нуль при $\xi\neq 0$.

Но есть и более общее определение эллиптичности. Пусть матрица $a(x,D)$ имеет размеры $d\times d$. Фиксируются две системы неотрицательных целых чисел $m_1,\ldots,m_d$ и $t_1,\ldots,t_d$, и старший порядок в $a_{j,k}(x,D)$ принимается равным m_j+t_k. Главный символ составляется из символов этих старших частей (некоторые из них могут оказаться нулевыми), и условие эллиптичности снова состоит в отличии от нуля определителя главного символа. Это так называемая *эллиптичность по Дуглису—Ниренбергу* [229]. Оператор можно при этом рассматривать как действующий из прямого произведения пространств $H^{s+t_k}(M)$ в прямое произведение пространств $H^{s-m_j}(M)$. Следует иметь в виду, что определить эллиптичность с параметром в этом случае непросто, если порядки диагональных элементов m_j+t_j зависят от j.

2. Матричные операторы можно рассматривать *в сечениях векторных расслоений*. Грубо говоря, это означает, что при перемещении точки по многообразию приходится менять не только локальную систему координат для независимых переменных, но и систему координат, в которой записан вектор из рассматриваемых скалярных функций. См., например, [57, т. 3, § 18].

3. Эллиптичность с параметром можно определить, рассматривая операторы, полиномиально зависящие от параметра. См., например, [180], [112]. Параметру при этом обычно приписывается фиксированный вес относительно дифференцирования. Например, оператор может иметь вид

$$\sum_{j=0}^{m}\lambda^{m-j}A_j(x,D), \tag{6.5.2}$$

где оператор A_j имеет порядок j; здесь вес параметра равен 1, а в уравнении (6.2.13) вес равен m. Если $a_{0,j}(x,\xi)$ — главный символ оператора A_j, то условие эллиптичности с параметром в угле Λ имеет вид

$$\det\sum\lambda^{m-j}a_{0,j}(x,\xi)\neq 0,\quad (\xi,\lambda)\neq 0,\ \lambda\in\Lambda. \tag{6.5.3}$$

Такие операторы являются объектом более общей спектральной теории *операторных пучков* — операторов, полиномиально зависящих от спектрального параметра. См., в частности, [35].

О связи эллиптических с параметром задач с параболическими уравнениями мы скажем в следующем параграфе.

4. Ослабив предположения о гладкости, можно рассматривать эллиптические операторы в конечном промежутке значений индекса s пространств $H^s(M)$. У нас будет повод воспользоваться этим в § 12 (см. теорему 12.1.1).

§ 7. Эллиптические граничные задачи в ограниченной области с гладкой границей

В этом параграфе мы будем пользоваться только пространствами H^s с неотрицательным s, т. е. L_2-пространствами Соболева—Слободецкого.

7.1. Определения и формулировки основных теорем. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с бесконечно гладкой границей Γ. Предположим, что в Ω задан скалярный линейный оператор в частных производных

$$A = a(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2l} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{7.1.1}$$

четного порядка $2l$ с коэффициентами, бесконечно гладкими в $\overline{\Omega}$.

Предположим, далее, что на Γ задано l граничных операторов

$$B_j = b_j(x, D) = \sum_{|\beta| \leqslant r_j} b_{j\beta}(x) D^\beta \quad (j = 1, \ldots, l) \tag{7.1.2}$$

неотрицательных порядков r_j с коэффициентами, бесконечно гладкими на Γ. Граничная задача, которую мы рассмотрим, записывается в виде

$$a(x, D)u(x) = f(x) \ \text{ в } \ \Omega, \tag{7.1.3}$$

$$b_j(x, D)u(x) = g_j(x) \ \text{ на } \ \Gamma \quad (j = 1, \ldots, l). \tag{7.1.4}$$

Ей сопоставляется оператор $\mathfrak{A}u = (f, g_1, \ldots, g_l)$, он переводит решение в набор правых частей.

В простейшей функциональной постановке задачи пространства для функций u, f, g_j выбираются следующим образом:

$$u \in H^s(\Omega), \quad f \in H^{s-2l}(\Omega), \quad g_j \in H^{s-r_j-1/2}(\Gamma). \tag{7.1.5}$$

Здесь для простоты предполагаем, что

$$s \geqslant 2l, \quad s > \max r_j + 1/2. \tag{7.1.6}$$

Следующее предложение должно быть очевидно читателю, прочитавшему предыдущие параграфы.

Предложение 7.1.1. *Оператор $\mathfrak{A}$ действует ограниченным образом из пространства $H^s(\Omega)$ в прямое произведение*

$$H^s(\Omega, \Gamma) = H^{s-2l}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{l} H^{s-r_j-1/2}(\Gamma). \tag{7.1.7}$$

Иначе говоря, справедлива оценка

$$\|f\|_{H^{s-2l}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{l} \|g_j\|_{H^{s-r_j-1/2}(\Gamma)} \leqslant C_s \|u\|_{H^s(\Omega)} \tag{7.1.8}$$

с постоянной, не зависящей от u.

Сформулируем определение эллиптичности этой задачи.

Первое условие эллиптичности состоит в том, что оператор A эллиптичен в $\overline{\Omega}$: для его главного символа $a_0(x, \xi)$ мы имеем

$$a_0(x, \xi) \neq 0 \quad (x \in \overline{\Omega},\ 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n). \tag{7.1.9}$$

Второе условие эллиптичности, называемое *правильной эллиптичностью* оператора A, состоит в том, что количество корней ζ уравнения $a_0(x, \xi', \zeta) = 0$ при $\xi' \neq 0$ в верхней и в нижней полуплоскости одинаково (и равно l). В замечании 6.1.1 было отмечено, что это условие автоматически выполнено, если $n > 2$ или $n = 2$ и оператор A эллиптичен с параметром. При $n = 2$ оно исключает примеры типа $(D_1 + iD_2)^2$. Условие правильной эллиптичности по непрерывности сохраняется при любых поворотах системы координат и выполнено, если оно выполнено хотя бы в одной точке x.

Третье условие — это так называемое *условие Лопатинского*. Оно накладывается на операторы задачи в каждой точке x_0 границы Γ. Для простоты его формулировки предположим, что начало координат перенесено в точку x_0 и система координат повернута так, что ось $t = x_n$ направлена по внутренней нормали к границе в этой точке. Пусть наши операторы переписаны в этой системе координат. Рассмотрим тогда следующую задачу на луче $\mathbb{R}_+ = \{t\colon t > 0\}$ при фиксированном $\xi' = \xi_0' \neq 0$:

$$\begin{aligned} &a_0(x_0, \xi_0', D_t)v(t) = 0 && (t > 0), \\ &b_{j0}(x_0, \xi_0', D_t)v|_{t=0} = h_j && (j = 1, \ldots, l). \end{aligned} \tag{7.1.10}$$

Здесь $b_{j0}(x,\xi)$ — главные символы операторов b_j:

$$b_{j,0}(x,\xi) = \sum_{|\beta|=r_j} b_{j\beta}(x)\xi^{\beta}. \tag{7.1.11}$$

Требуется, чтобы задача (7.1.10) имела одно и только одно решение в $L_2(\mathbb{R}_+)$ при любом $\xi_0' \neq 0$ и любых числах h_j.

Поясним, что при наших предположениях подпространство решений уравнения $a_0(x_0, \xi_0', D_t)v(t)=0$, принадлежащих $L_2(\mathbb{R}_+)$, состоит из экспоненциально убывающих по модулю при $t \to +\infty$ функций и в точности l-мерно, а число граничных условий равно этой размерности. Ср. с замечанием 7.1.2, 1 ниже. Задача (7.1.10) получается из исходной задачи, если заморозить коэффициенты в точке x_0, отбросить младшие члены и сделать формальное преобразование Фурье по касательным переменным.

Это условие впервые в полной общности появилось в работе Я. Б. Лопатинского [148]. Его называют также *условием Шапиро—Лопатинского*: аналогичные рассмотрения провела З. Я. Шапиро [168, 169] при более специальных предположениях. Используется также такое сочетание слов: граничные операторы *накрывают* данный эллиптический оператор.

Если выполнены все три условия, задача называется *эллиптической*.

Простейший пример — задача Дирихле для уравнения Пуассона:

$$-\Delta u = f \text{ в } \Omega, \quad u = g \text{ на } \Gamma. \tag{7.1.12}$$

Второй пример — задача Неймана для него:

$$-\Delta u = f \text{ в } \Omega, \quad \partial_\nu u = g \text{ на } \Gamma, \tag{7.1.13}$$

где ∂_ν — производная по внутренней (для определенности) нормали к Γ.

Задача 1. Проверьте эллиптичность этих задач.

Замечание 7.1.2. Условию Лопатинского можно придать другие формы.

1. Если оператор $a(x, D)$ правильно эллиптичен, то при $\xi' \neq 0$ многочлен $a(\zeta) = a_0(x_0, \xi', \zeta)$ факторизуется следующим образом:

$$a_0(\zeta) = a_0^+(\zeta)a_0^-(\zeta), \tag{7.1.14}$$

где корни многочлена $a_0^+(\zeta)$ лежат в верхней полуплоскости, а корни многочлена $a_0^-(\zeta)$ — в нижней. При этом коэффициенты в этих многочленах гладко зависят от (x_0, ξ'). Все решения уравнения $a_0^+(D_t)v(t)=0$ экспоненциально убывают по модулю при $t\to\infty$; это все убывающие по модулю при $t\to\infty$ решения первого уравнения в (7.1.10). Положим еще $b_{j,0}(\zeta)=b_{j,0}(x_0,\xi',\zeta)$. Условию Лопатинского в рассматриваемой точке при любом $\xi'\neq 0$ можно придать следующую форму: *задача*

$$a_0^+(D_t)v(t)=0 \quad (t>0), \quad b_{j,0}(D_t)v(t)|_{t=0}=h_j \quad (j=1,\dots,l) \tag{7.1.15}$$

однозначно разрешима при любых h_j.

Отсюда нетрудно вывести, что оно эквивалентно также следующему условию: *остатки* $\widetilde{b}_{0,j}(\zeta)$ *от деления многочленов* $b_{0,j}(\zeta)$ *на многочлен* $a_0^+(\zeta)$ *линейно независимы*. В (7.1.15) можно $b_{j,0}$ заменить на $\widetilde{b}_{j,0}$.

2. Отсюда следует также, что условие Лопатинского эквивалентно условию единственности решения задачи (7.1.10) или (7.1.15) в $L_2(\mathbb{R}_+)$: при $h_j=0$ для всех j решение, принадлежащее $L_2(\mathbb{R}_+)$, тривиально.

3. С другой стороны, содержание условия Лопатинского не изменится, если в первом уравнении нуль справа заменить функцией $f(t)$ из $L_2(\mathbb{R}_+)$. Это следует из того, что, продолжив ее нулем на $t<0$, легко построить принадлежащее $L_2(\mathbb{R}_+)$ решение уравнения $a_0(D_t)v_0(t)=f(t)$ при помощи преобразования Фурье:

$$v_0(t)=F^{-1}[a_0(\xi)]^{-1}(Ff)(\xi)\,d\xi.$$

Вычитая $v_0(t)$ из решения, придем к задаче (7.1.10).

Задачей Дирихле для правильно эллиптического уравнения порядка $2l$ называется задача с граничными условиями

$$\partial_\nu^j u=g_j \quad (j=0,\dots,l-1). \tag{7.1.16}$$

В качестве следствия из первого из этих замечаний получаем такое обобщение первого примера: *задача Дирихле для любого* (*скалярного*) *правильно эллиптического уравнения порядка* $2l$ *эллиптична*. Действительно, здесь остатки — это сами многочлены $b_{j,0}(\zeta)=\zeta^j$.

В частности, эллиптична задача Дирихле для *полигармонического* уравнения

$$\Delta^l u=f. \tag{7.1.17}$$

Приведем формулировки основных теорем.

«Самая основная» теорема теории рассматриваемых эллиптических задач аналогична теореме 6.2.1 и состоит в следующем.

Теорема 7.1.3. *Следующие условия эквивалентны.*

1°. *Задача* (7.1.3)—(7.1.4) *эллиптична.*

2°. *Оператор* $\mathfrak{A}\colon H^s(\Omega)\mapsto H^s(\Omega,\Gamma)$ *фредгольмов.*

3°. *Оператор* $\mathfrak{A}$ *имеет двусторонний параметрикс* $\mathfrak{R}$, *действующий ограниченным образом из* $H^s(\Omega,\Gamma)$ *в* $H^s(\Omega)$ *и такой, что операторы* $\mathfrak{A}\mathfrak{R}-\mathcal{I}$ *и* $\mathfrak{R}\mathfrak{A}-I$ *действуют ограниченным образом соответственно из* $H^s(\Omega,\Gamma)$ *в* $H^{s+1}(\Omega,\Gamma)$ *и из* $H^s(\Omega)$ *в* $H^{s+1}(\Omega)$. Здесь $\mathcal{I}$ и I — соответствующие единичные операторы.

4°. *Справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_{H^s(\Omega)}\leqslant C'_s\Big[\|f\|_{H^{s-2l}(\Omega)}+\sum_{j=1}^{l}\|g_j\|_{H^{s-r_j-1/2}(\Gamma)}+\|u\|_{H^0(\Omega)}\Big] \tag{7.1.18}$$

с постоянной, не зависящей от u.

Снова мы имеем здесь две шкалы пространств. В отношении оценки снова отметим, что она двусторонняя: правая часть оценивается через левую (см. (7.1.8)). Это опять свидетельствует об адекватности пространств Соболева—Слободецкого рассматриваемым задачам. В случае единственности последнее слагаемое справа в (7.1.18) излишне. Параметрикс снова квалифицированный.

Приведем теорему о повышении гладкости решений, или об их регулярности.

Теорема 7.1.4. *Пусть задача* (7.1.3)—(7.1.4) *эллиптична и число* s *удовлетворяет условиям* (7.1.6). *Пусть* $\tau>0$ *и*

$$u\in H^s(\Omega),\quad \text{но } f\in H^{s-2l+\tau}(\Omega),\quad g_j\in H^{s-r_j-1/2+\tau}(\Gamma)\quad (j=1,\dots,l).$$

Тогда $u\in H^{s+\tau}(\Omega)$.

Есть и локальный вариант этой теоремы, состоящий в том, что при правых частях, имеющих, скажем, повышенную гладкость вблизи некоторой точки, решение имеет соответствующую повышенную гладкость вблизи этой точки.

Далее, есть условия *эллиптичности с параметром*, при выполнении которых можно гарантировать однозначную разрешимость задачи при больших по модулю значениях параметра. Сформулируем простейший вариант такого результата. Пусть уравнение $a(x,D)u=f$ заменено на уравнение с параметром

$$a(x,D)u-\lambda u=f \tag{7.1.19}$$

в Ω. Для простоты будем считать, что граничные условия не зависят от λ. Параметр λ изменяется в замкнутом угле Λ на комплексной плоскости с вершиной в начале координат. Условия эллиптичности задачи с параметром формулируются так же, как условия эллиптичности, только главный символ $a_0(x,\xi)$ заменяется на разность $a_0(x,\xi)-\lambda$ и предполагается, что она отлична от нуля при $(\xi,\lambda)\neq 0$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\Lambda$, а в условии Лопатинского предполагается, что задача на луче для уравнения

$$[a_0(x_0,\xi_0',D_t)-\lambda]v(t)=0 \tag{7.1.20}$$

имеет единственное убывающее при $t\to+\infty$ решение при $(\xi_0',\lambda)\neq 0$, $\lambda\in\Lambda$. Условия эллиптичности с параметром содержат в себе условия эллиптичности (при $\lambda=0$).

Например, задача Дирихле для уравнения $\Delta u-\lambda u=f$ эллиптична с параметром вдоль любого луча, кроме отрицательной полуоси. То же верно для задачи Неймана.

Задача 2. Проверьте это самостоятельно. Проверьте также, что в случае задачи Дирихле для правильно эллиптического уравнения порядка $2l$ эллиптичность с параметром имеет место вдоль любого луча, вдоль которого это уравнение эллиптично с параметром.

Теорема 7.1.5. *Пусть задача* (7.1.19), (7.1.4) *эллиптична с параметром в* Λ. *Тогда при любом* s, *удовлетворяющем условию* (7.1.6), *она однозначно разрешима при достаточно больших по модулю* $\lambda\in\Lambda$.

При этом справедлива априорная оценка, равномерная по параметру. Мы приведем простейшую оценку при предположениях $s=2l>\max r_j$, $g_j=0$:

$$\|u\|_{H^{2l}(\Omega)}+|\lambda|\|u\|_{H^0(\Omega)}\leqslant C\|f\|_{H^0(\Omega)}, \tag{7.1.21}$$

где постоянная не зависит и от λ. Условия эллиптичности с параметром необходимы для справедливости такой оценки.

При других λ получается фредгольмовость задачи с нулевым индексом.

Отметим, что задачи с параметром получаются из нестационарных смешанных задач в цилиндрической области $\Omega\times(0,\infty)$ с не зависящими от времени $t\in(0,\infty)$ коэффициентами (буква t выше имела другой смысл). Например, рассмотрим в такой области уравнение теплопроводности

$$\Delta U(x,t)-\partial_t U(x,t)=F(x,t) \tag{7.1.22}$$

с граничным условием Дирихле на боковой поверхности

$$U(x,t) = G(x,t) \quad (x \in \Gamma) \tag{7.1.23}$$

и для простоты однородным начальным условием

$$U(x,0) = 0. \tag{7.1.24}$$

Формальное преобразование Лапласа

$$u(x,\lambda) = \int_0^\infty U(x,t)e^{-\lambda t}dt \tag{7.1.25}$$

переводит ее в задачу с параметром для оператора Лапласа, упомянутую перед формулировкой теоремы 7.1.5. При этом Λ — правая полуплоскость. Это на самом деле путь к исследованию нестационарных — «параболических» задач, см., например, [180] и [112]. Но есть и прямой путь — исследование смешанной задачи с коэффициентами, зависящими и от t, методом замораживания коэффициентов. См., например, работу В. А. Солонникова [164], а также обзор С. Д. Эйдельмана [172].

Задача 3. Проверьте, что задача Дирихле для уравнения $\Delta^l u - \lambda u = 0$ эллиптична с параметром вдоль любого луча, кроме $\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}_-$. Выведите отсюда, что при $s \geqslant 2l$ определен и ограничен оператор перехода от набора функций $v_j \in H^{s-j-1/2}(\Gamma)$ $(j = 0, \ldots, l-1)$ к функции $u \in H^s(\Omega)$ с данными Коши $v_0, \ldots, v_{l-1}$, не зависящий от s.

Теперь мы наметим доказательства теорем 7.1.3—7.1.5. Для облегчения выкладок будем считать, что $r_j < 2l$ при всех j и $s = 2l$. Подробно остановимся на принципиально важных моментах; технические вещи, аналогичные рассмотренным в предыдущем параграфе и лишь несколько более громоздкие, мы подробно рассматривать не будем.

7.2. Доказательства основных теорем. По аналогии с § 6 теорема 7.1.3 доказывается в три этапа. Начнем с первого этапа. Рассмотрим задачу в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$ для операторов без младших членов. Коэффициенты операторов сейчас считаем не зависящими от x. Задача имеет вид

$$a_0(D)u(x) = f(x) \qquad (x_n > 0), \tag{7.2.1}$$

$$b_{j,0}(D)u(x)|_{x_n=0} = g_j(x') \quad (j = 1, \ldots, l). \tag{7.2.2}$$

После (формального) преобразования Фурье по касательным переменным имеем задачу (полагая $t=x_n$)

$$a_0(\xi', D_t)v(\xi', t) = h(\xi', t) \quad (t > 0), \tag{7.2.3}$$

$$b_{j,0}(\xi', D_t)v(\xi', t)|_{t=0} = h_j(\xi') \quad (j = 1, \ldots, l), \tag{7.2.4}$$

где $v=F'u$, $h=F'f$, $h_j=F'g_j$. Пространство убывающих при $t\to\infty$ решений уравнения $a_0(\xi', D_t)v(t)=0$ обозначим через $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(\xi')$. Любой базис $\omega_1(t), \ldots, \omega_l(t)$ в этом пространстве назовем *устойчивым базисом*.

7.2.1. Канонический базис. При $h=0$ в формулах (7.2.3)—(7.2.4) многочлен $a_0(\xi', \zeta)$ по ζ можно заменить на $a_0^+(\xi', \zeta)$, а многочлены $b_j(\xi', \zeta)$ по ζ — на их остатки $\widetilde{b}_{j,0}(\xi', \zeta)$ от деления на $a_0^+(\xi', \zeta)$ (переменные ξ' играют роль параметров):

$$a_0^+(\xi', D_t)v(\xi', t) = 0 \quad (t > 0), \tag{7.2.5}$$

$$\widetilde{b}_{j,0}(\xi', D_t)v(\xi', t)|_{t=0} = h_j(\xi') \quad (j = 1, \ldots, l). \tag{7.2.6}$$

Старший коэффициент в a_0^+ без ограничения общности примем равным единице. Отметим, что функции $\widetilde{b}_{j,0}(\xi', \zeta)$ по совокупности переменных положительно однородны степени r_j при $\xi'\neq 0$.

Устойчивый базис можно построить в виде контурных интегралов

$$\omega_k(\xi', t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma} \frac{e^{i\zeta t}\zeta^{k-1}}{a_0^+(\xi', \zeta)}\, d\zeta \quad (k = 1, \ldots, l), \tag{7.2.7}$$

где $\gamma=\gamma(\xi')$ — замкнутый контур в верхней полуплоскости, охватывающий все корни ζ многочлена $a_0^+(\xi', \zeta)$, т. е. все корни многочлена $a_0(\xi', \zeta)$ в этой полуплоскости. Очевидно, что это решения уравнения (7.2.5) с $h=0$, убывающие по модулю при $t\to+\infty$, и что они линейно независимы. Контур можно менять, но локально, вблизи фиксированной точки ξ'_0, его можно считать не зависящим от ξ'. Определим *канонический базис* $\Omega_k(\xi', t)$ в $\mathfrak{M}(\xi')$ условиями

$$\widetilde{b}_{j,0}(\xi', D_t)\Omega_k(\xi', t)|_{t=0} = \delta_{j,k} \quad (j, k = 1, \ldots, l). \tag{7.2.8}$$

Он существует в силу условия Лопатинского, и каждую функцию $\Omega_k(\xi', t)$ можно найти, подставив в условия (7.2.8) с фиксированным k линейную комбинацию функций $\omega_1(\xi', t), \ldots, \omega_l(\xi', t)$. Получится линейная система уравнений с ненулевым определителем, и коэффициенты однозначно определяются. При этом получается, что

$\Omega_k(\xi', t)$ — похожие на (7.2.7) контурные интегралы, только ζ^{k-1} заменяются некоторыми многочленами $N_k(\xi', \zeta)$ по ζ. Эти многочлены определяются не однозначно, но их можно подчинить условиям

$$\widetilde{b}_{j,0}(\xi', \zeta) N_k(\xi', \zeta) = \delta_{j,k} \zeta^{l-1}.$$

Ясно, что тогда $N_k(\xi', \zeta)$ — многочлен степени не выше $l-1$ по ζ, положительно однородный степени $l - r_k - 1$ по совокупности переменных при $\xi' \neq 0$. Получаем

Предложение 7.2.1. *Канонический базис имеет вид*

$$\Omega_k(\xi', t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{e^{i\zeta t} N_k(\xi', \zeta)}{a_0^+(\xi', \zeta)} \, d\zeta \quad (k = 1, \ldots, l), \tag{7.2.9}$$

где $N_k(\xi', \zeta)$ — многочлены по ζ степени не выше $l-1$ с бесконечно гладкими по ξ' при $\xi' \neq 0$ коэффициентами, являющиеся положительно однородными степени $l - r_k - 1$ функциями по совокупности переменных (ξ', ζ) при этих ξ'.

Явные формулы для N_k приведены в [1] в немного других обозначениях.

Предложение 7.2.2. *Справедливы следующие неравенства с постоянной, не зависящей от ξ':*

$$\int\limits_0^\infty |D_t^j \Omega_k(\xi', t)|^2 dt \leqslant C_1 |\xi'|^{2(j - r_k) - 1} \quad (j = 0, \ldots, 2l;\ k = 1, \ldots, l). \tag{7.2.10}$$

Доказательство. Примем, что при $|\xi'| = 1$ контур γ не зависит от ξ': $\gamma(\xi') = \gamma_0$. Далее, примем, что при других ξ' он получается преобразованием подобия из γ_0 с коэффициентом $|\xi'|$: $\gamma(\xi') = |\xi'| \gamma_0$. Ясно, что это можно предположить. Теперь из (7.2.9), продифференцировав j раз по t под знаком интеграла и заменив $\zeta / |\xi'|$ новой переменной, получаем

$$|D_t^j \Omega_k(\xi', t)| \leqslant C |\xi'|^{j - r_k} e^{-\varepsilon |\xi'| t} \quad (j = 0, \ldots, 2l,\ k = 1, \ldots, l)$$

с положительными C и ε, не зависящими от ξ' и t. Поэтому

$$\int\limits_0^\infty |D_t^j \Omega_k(\xi', t)|^2 dt \leqslant C |\xi'|^{2(j - r_k)} \int\limits_0^\infty e^{-2\varepsilon |\xi'| t} dt.$$

Остается заменить $|\xi'| t$ новой переменной. Получаем требуемую оценку. □

7.2.2. Априорная оценка. Для простоты будем считать, что $s = 2l > r_k$. На первом этапе мы хотим получить для задачи (7.2.1), (7.2.2) оценку

$$\|u\|^2_{H^{2l}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\left[\|f\|^2_{H^0(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{k=1}^{l} \|g_k\|^2_{H^{2l-r_k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|^2_{H^0(\mathbb{R}^n_+)}\right]. \quad (7.2.11)$$

Все нормы для удобства заменены их квадратами. Примем сначала, что $f = 0$. Тогда для решения задачи (7.2.5), (7.2.6) мы имеем формулу

$$v(\xi', t) = \sum_{k=1}^{l} \Omega_k(\xi', t) h_k(\xi'). \quad (7.2.12)$$

Теперь достаточно получить оценку

$$\sum_{j=0}^{2l} |\xi'|^{2(2l-j)} \int_0^\infty |D_t^j v(\xi', t)|^2 dt \leqslant C' \sum_{k=1}^{l} |\xi'|^{2(2l-r_k)-1} |h_k(\xi')|^2 \quad (7.2.13)$$

с постоянной, не зависящей от ξ' и рассматриваемых функций. Действительно, проинтегрировав эту оценку по ξ', мы получим почти нужную оценку (7.2.11), но в полунормах вместо норм. Останется добавить справа квадраты норм нулевого порядка правых частей g_j граничных условий, а также слева и справа квадрат нулевой нормы решения.

Но оценка (7.2.13) непосредственно следует из (7.2.10).

Теперь пусть $f \neq 0$. Этот случай сводится к только что рассмотренному следующим образом. Продолжим $h(\xi', t)$ нулем на $t < 0$ и положим при $\xi' \neq 0$

$$v_0(\xi', t) = F_n^{-1} a_0^{-1}(\xi) F_n h(\xi', t). \quad (7.2.14)$$

Тогда (ср. с (7.2.13)), дважды применяя равенство Парсеваля по последнему переменному, получаем

$$|\xi'|^{2(2l-j)} \int_0^\infty |D_t^j v_0(\xi', t)|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \int \frac{|\xi'|^{2(2l-j)} \xi_n^{2j}}{|a_0(\xi)|^2} |(F_n h)(\xi)|^2 \, d\xi_n \leqslant C_2 \int_0^\infty |h(\xi', t)|^2 dt.$$

Этого достаточно, так как при интегрировании интеграла справа по ξ' получается $\|f\|^2_{H^0(\mathbb{R}^n_+)}$.

Итак, оценка (7.2.11) получена, чем закончен первый этап. Перепишем результат для операторов без младших членов с коэффициентами, замороженными в точке x_0:

$$\|u\|^2_{H^{2l}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant$$
$$\leqslant C\Big[\|a_0(x_0,D)u\|^2_{H^0(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{k=1}^{l}\|b_{k,0}(x_0,D)u\|^2_{H^{2l-r_k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|^2_{H^0(\mathbb{R}^n_+)}\Big].$$

На втором этапе мы рассматриваем задачу в полупространстве с операторами, содержащими младшие члены:

$$a(x,D) = a_0(x,D) + a_1(x,D), \quad b_k(x,D) = b_{k,0}(x,D) + b_{k,1}(x,D),$$

где в старших членах (в $a_0(x,D)$ и $b_{k,0}(x,D)$) предполагаем все коэффициенты близкими к их значениям в граничной точке x_0. Получаем

$$\|u\|^2_{H^{2l}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\Big[\|a(x,D)u\|^2_{H^0(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{k=1}^{l}\|b_k(x,D)u\|^2_{H^{2l-r_k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} +$$
$$+ \|u\|^2_{H^0(\mathbb{R}^n_+)} + T_0 + \sum_{k=1}^{l} T_k\Big],$$

где

$$T_0 = \|a_1(x,D)u\|^2_{H^0(\mathbb{R}^n_+)} + \|[a_0(x_0,D) - a_0(x,D)]u\|^2_{H^0(\mathbb{R}^n_+)}$$

и

$$T_k = \|b_{k,1}(x,D)u\|^2_{H^{2l-r_k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} +$$
$$+ \|[b_{k,0}(x_0,D) - b_{k,0}(x,D)]u\|^2_{H^{2l-r_k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Завершение второго этапа сводится к получению оценки, скажем, вида

$$C\Big[T_0 + \sum_{k=1}^{l} T_k\Big] \leqslant \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^{2l}(\mathbb{R}^n_+)} + C_1\|u\|^2_{H^0(\mathbb{R}^n_+)}$$

при достаточной близости старших коэффициентов к постоянным. Это возможно благодаря нашим следующим заготовкам: теорема 3.3.1 о следе на границе полупространства, теорема 3.2.3 об оценке нормы оператора умножения на гладкую функцию в полупространстве с учетом верхней грани ее модуля, неравенство (3.2.3) для промежуточных норм в полупространстве, а также аналогичные результаты из § 1 для $\mathbb{R}^{n-1}$ вместо $\mathbb{R}^n$ (теорема 1.9.2 и предложение 1.8.1).

На третьем этапе мы умножаем заданную в области Ω функцию $u \in H^{2l}(\Omega)$ на разбиение единицы в замыкании окрестности этой области:

$$u = \sum_0^N \varphi_j u,$$

где φ_j — гладкие функции, носитель функции φ_0 лежит строго внутри области, а каждая следующая функция φ_j равна нулю вне малой окрестности какой-либо граничной точки; подразумевается, что последние функции заменены их сужениями на Ω. Считаем, что в этой окрестности возможно выпрямление границы и использование результатов второго этапа, поскольку старшие коэффициенты там близки к постоянным. Оценку для $\varphi_0 u$ берем из результатов § 6. Можно считать, что теперь в исходных координатах мы имеем

$$\|u\|^2_{H^{2l}(\Omega)} \leqslant C\Big[\sum_{j=0}^N \|a(x,D)(\varphi_j u)\|^2_{H^0(\Omega)} + \\ + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^l \|b_k(x,D)(\varphi_j u)\|^2_{H^{2l-r_j-1/2}(\Gamma)} + \|u\|^2_{H^0(\Omega)}\Big].$$

Далее надо прокоммутировать (поменять местами) дифференциальные операторы и функции φ_j; при этом возникнут дополнительные члены, оцениваемые через $\varepsilon\|u\|^2_{H^{2l}(\Omega)}$ с малым коэффициентом ε и $\|u\|^2_{H^0(\Omega)}$ при помощи оценок промежуточных норм и теоремы о следе в области. На последнем шаге мы опускаем эти функции, пользуясь ограниченностью операторов умножения на них.

7.2.3. Правый параметрикс. При выводе априорной оценки мы исходили из того, что нам задано решение. Теперь же мы должны исходить из того, что заданы правые части и надо построить приближенное решение.

Мы ограничимся тем, что наметим первый этап. Полагаем

$$\mathfrak{R}(f,g) = R_0 f + \sum_1^l R_j(g_j - B_j R_0 f). \tag{7.2.15}$$

Здесь

$$R_0 f = F^{-1}\frac{|\xi|^{2l}}{1+|\xi|^{2l}} a_0^{-1}(\xi) F\mathcal{E} f, \tag{7.2.16}$$

$\mathcal{E}$ — оператор продолжения функции на все пространство,

$$R_j g_j = F'^{-1} \frac{|\xi'|^{r_j+1}}{1+|\xi'|^{r_j+1}} \Omega_j(\xi', t) F' g_j. \qquad (7.2.17)$$

Назначение введенных здесь дробей — погасить особенность функции $a_0^{-1}(\xi)$ в точке $\xi = 0$ и функций канонического базиса в точке $\xi' = 0$.

Необходимость алгебраических условий эллиптичности проверяется от противного подстановкой в априорную оценку специальных семейств функций, зависящих от дополнительного параметра.

В случае задачи с параметром так строится точный правый обратный оператор к оператору задачи. Для задачи в полупространстве с постоянными старшими коэффициентами и без младших членов такой оператор строится в явном виде при помощи преобразования Фурье по касательным переменным. На следующих этапах используется обратимость оператора, близкого к обратимому оператору по норме. Эта близость обеспечивается увеличением модуля параметра λ.

Подробности см., например, в [112].

Позднее этих доказательств появилось «исчисление граничных задач» [200, 201]. Граничным задачам, вообще говоря, с псевдодифференциальными операторами вместо дифференциальных, сопоставляются матричные операторы, образующие алгебру, этим операторам отвечают матричные символы, и в пределах этой алгебры для эллиптической задачи находится двусторонний параметрикс. Эта теория детально изложена в книге [44]. Мы наметим ее в [3]. Есть также «исчисление задач с параметром» [77]. В [3] будет подробно изложен менее громоздкий вариант такой теории (который появился раньше) — для псевдодифференциальных операторов на замкнутом многообразии.

7.3. Нормальные системы граничных операторов и формально сопряженные задачи. Задачи с однородными граничными условиями. Рассмотрим систему граничных операторов

$$B_j = b_j(x, D) = \sum_{|\beta| \leqslant r_j} b_{j,\beta}(x) D^\beta \quad (j = 1, \ldots, k) \qquad (7.3.1)$$

порядков r_j. В этом пункте мы будем предполагать, что их коэффициенты являются бесконечно гладкими в окрестности границы и что $r_j < 2l$, где $2l$ — порядок оператора $a(x, D)$, а k сначала не больше $2l$. Старшие части этих операторов обозначаем через $B_{j,0}=b_{j,0}(x,D)$.

Определения. Система (7.3.1) называется *нормальной*, если порядки r_j попарно различны и если граница Γ является нехарактеристической для каждого из операторов B_j в каждой ее точке. Последнее означает, что если записать B_j в координатах, в которых ось x_n направлена по нормали к границе, то коэффициент при старшей производной по x_n (порядка r_j) — не обращающаяся в нуль функция.

Если для задачи (7.1.19), (7.1.4) есть луч эллиптичности с параметром, то граничные операторы в ней образуют нормальную систему. Это можно проверить, полагая в условии Лопатинского $\xi'=0$, $\lambda\neq 0$.

Системой Дирихле называется нормальная система из $2l$ операторов.

Примером может служить система последовательных нормальных производных:

$$1, D_\nu, \ldots, D_\nu^{2l-1}. \tag{7.3.2}$$

Очевидно, что при $k<2l$ любую нормальную систему можно дополнить до системы Дирихле, например, добавив к ней нормальные производные недостающих порядков.

Отметим также, что любые две системы Дирихле линейно выражаются одна через другую при помощи матричных операторов в частных производных по касательным переменным с бесконечно гладкими коэффициентами. Например, пусть (7.3.1) — система Дирихле, $k=2l$ и $r_j=j-1$. Запишем оператор $b_j(x,D)$ по степеням нормальной производной:

$$b_j(x,D)=b_{j,0}(x,D')+b_{j,1}(x,D')D_\nu+\ldots+b_{j,j-1}(x)D_\nu^{j-1}. \tag{7.3.3}$$

Это выражения операторов системы (7.3.1) через операторы системы (7.3.2). Здесь $b_{j,k}(x,D')$ — дифференциальный оператор порядка не выше $j-1-k$ с бесконечно гладкими коэффициентами, содержащий дифференцирования только по касательным направлениям, причем последний коэффициент $b_{j,j-1}(x)$ — всюду отличная от нуля числовая функция. Таким образом, матрица перехода от системы (7.3.2) к (7.3.1) — это нижняя треугольная невырожденная матрица из дифференциальных операторов. Порядки ее элементов возрастают при каждом сдвиге влево и вниз на диагональ, параллельную главной. Обратная матрица устроена аналогично. Как следствие мы можем аналогично линейно выразить любую систему Дирихле через любую другую систему Дирихле.

Напомним, что *формально сопряженным* к оператору A называется оператор

$$A^*v = \sum_{|\alpha|\leqslant 2l} D^\alpha[\overline{a_\alpha(x)}v(x)]. \tag{7.3.4}$$

Он эллиптичен и, как легко проверить, правильно эллиптичен вместе с A. Операторы A и A^* связаны формулой

$$(Au, v)_\Omega = (u, A^*v)_\Omega \tag{7.3.5}$$

на функциях из $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ (что проверяется интегрированием по частям). Это значит, что они сопряжены в смысле теории обобщенных функций в Ω.

Вернемся к системе (7.3.1); будем теперь считать, что $k = l$ и что она нормальна, а задача для оператора A с этими граничными операторами эллиптична.

Дополним систему $\{B_1, \ldots, B_l\}$ до системы Дирихле $\{B_1, \ldots, B_{2l}\}$.

Теорема 7.3.1. *Можно построить другую систему Дирихле $\{C_1, \ldots$ $\ldots, C_{2l}\}$ так, что для функций u, v из $H^{2l}(\Omega)$ справедлива формула Грина*

$$(Au, v)_\Omega - (u, A^*v)_\Omega = \sum_1^l (B_{l+j}u, C_jv)_\Gamma - \sum_1^l (B_ju, C_{l+j}v)_\Gamma. \tag{7.3.6}$$

Здесь подразумевается, что все операторы имеют бесконечно гладкие коэффициенты. Сумма порядков операторов B и C в каждом слагаемом равна $2l-1$. Неоднозначность построения содержится в выборе операторов $B_{l+1}, \ldots, B_{2l}$; если они выбраны, то вторая система строится, как мы увидим дальше, уже однозначно. Заметим, что если для функций u, v из $H^{2l}(\Omega)$ выполняются условия

$$B_1u = \ldots = B_lu = 0, \quad C_1v = \ldots = C_lv = 0, \tag{7.3.7}$$

то формула (7.3.6) принимает вид (7.3.5).

Если мы имеем (7.3.6), то задачи с операторами $A, B_1, \ldots, B_l$ и $A^*, C_1, \ldots, C_l$ называются *формально сопряженными*. В частности, если задача совпадает с формально сопряженной к ней, то она называется *формально самосопряженной*.

Наметим доказательство теоремы. Функции $u(x)$ и $v(x)$ достаточно считать бесконечно гладкими и имеющими малые носители вблизи граничной точки. Выпрямив границу, предположим, что мы рассматриваем функции в полупространстве $\{x: x_n > 0\}$. Запишем оператор A по степеням производной D_n:

$$A = A_0 + A_1 D_n + \ldots + A_{2l} D_n^{2l}.$$

Здесь A_j — дифференциальные операторы по касательным переменным порядка не выше $2l - j$, причем последний коэффициент — отличная от нуля функция, см. замечание 6.1.1. Нетрудно проследить за процедурой интегрирования по частям, приводящей к формуле

$$(Au, v)_{\mathbb{R}^n_+} - (u, A^* v)_{\mathbb{R}^n_+} = \sum_{k=1}^{2l} (D_n^{k-1} u, N_k v)_{\mathbb{R}^{n-1}},$$

где N_k — оператор в частных производных порядка $2l - k$, в котором коэффициент при D_n^{2l-k} с точностью до знака совпадает с A^*_{2l}. Значит, эти операторы образуют нормальную систему.

Сумму граничных членов запишем в виде скалярного произведения столбцов

$$Du = (u, \ldots, D_n^{2l-1} u)' \quad \text{и} \quad Nv = (N_1 v, \ldots, N_{2l} v)' \colon [Du, Nv].$$

Столбец из операторов $B_j u$ временно расположим в порядке убывания порядков этих операторов и обозначим его после этого через $\widetilde{B}u$. Тогда $Du = \mathcal{B}\widetilde{B}u$, где $\mathcal{B}$ — нижняя треугольная матрица из операторов в частных производных по x' с главной диагональю, состоящей из не обращающихся в нуль функций, и мы имеем

$$[Du, Nv] = [\mathcal{B}\widetilde{B}u, Nv] = [\widetilde{B}u, \mathcal{B}^* Nv].$$

Порядки операторов N_k убывают сверху вниз, а $\mathcal{B}^*$ — верхняя треугольная матрица. Предоставляем читателю проверить, что на v здесь действует система Дирихле и что после надлежащего изменения обозначений получается нужная формула (7.3.6).

Теорема 7.3.2. *Пусть задачи с операторами $A, B_1, \ldots, B_l$ и A^*, $C_1, \ldots, C_l$ являются формально сопряженными. Тогда если одна из них эллиптична, то вторая тоже эллиптична.*

Подробное доказательство мы рекомендуем посмотреть в книге [30, гл. 2, п. 2]. (Другое, чисто алгебраическое, но более формальное доказательство есть в работе [301].) Мы ограничимся объяснением основной идеи. Если провести локализацию, заморозить коэффициенты в граничной точке, отбросить младшие члены и сделать преобразование Фурье по касательным переменным, то дело сводится к следующей ситуации. Имеются две задачи на луче $\mathbb{R}_+ = \{t : t > 0\}$ для обыкновенных дифференциальных операторов порядка $2l$ с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} &a_0(D)u(t) = f(t) \quad (t > 0), \qquad b_{j,0}u(t)|_{t=0} = 0 \quad (j = 1, \dots, l), \\ &a_0^*(D)v(t) = g(t) \quad (t > 0), \qquad c_{j,0}u(t)|_{t=0} = 0 \quad (j = 1, \dots, l). \end{aligned}$$

Они рассматриваются в классе правых частей и решений, принадлежащих $L_2(\mathbb{R}_+)$. Для функций u, v, удовлетворяющих этим граничным условиям,

$$\int_0^\infty a_0(D)u(t) \cdot \overline{v(t)}\, dt = \int_0^\infty u(t) \cdot \overline{a_0^*(D)v(t)}\, dt.$$

В силу эллиптичности исходной задачи первая задача однозначно разрешима в классе решений и правых частей, принадлежащих $L_2(\mathbb{R}_+)$. Для второй достаточно показать, что при нулевой функции $g(t)$ она имеет только тривиальное решение в этом классе. (См. замечание 7.1.2, п. 2.) Но при такой $g(t)$ из последней формулы мы имеем

$$\int_0^\infty a_0(D)u(t) \cdot \overline{v(t)}\, dt = 0.$$

Теперь достаточно найти решение $u(t)$ первой задачи с $f(t) = v(t)$. Мы получим

$$\int_0^\infty |v(t)|^2 dt = 0,$$

откуда $v(t) = 0$, что и надо было проверить.

Обозначим через $H_B^{2l}(\Omega)$ подпространство функций в $H^{2l}(\Omega)$, удовлетворяющих однородным, т. е. нулевым, граничным условиям $B_j u = 0$ $(j = 1, \dots, l)$, и через A_B оператор $H_B^{2l}(\Omega) \to L_2(\Omega)$, действующий по формуле $A_B u = Au$. Он отвечает задаче

$$Au = f \ \text{ в } \Omega, \quad B_1 u = \ldots = B_l u = 0 \ \text{ на } \Gamma. \tag{7.3.8}$$

Теорема 7.3.3. *При сделанных предположениях этот оператор фредгольмов. Его ядро состоит из бесконечно гладких функций* (*после возможного исправления на множестве нулевой меры*).

Доказательство. Это следует из аналогичных свойств оператора, отвечающего исходной задаче с неоднородными граничными условиями. Действительно, ядро оператора A_B совпадает с ядром оператора, отвечающего исходной задаче, поэтому оно конечномерно и состоит из бесконечно гладких функций. Известная нам априорная оценка принимает вид

$$\|u\|_{H^{2l}(\Omega)} \leqslant C\left[\|A_B u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}\right]. \tag{7.3.9}$$

Отсюда следует замкнутость области значений оператора A_B. Сохраняется конечномерность ее коразмерности. □

Добавим, что область определения $H_B^{2l}(\Omega)$ оператора A_B плотна в $L_2(\Omega)$. Из оценки видна также замкнутость оператора A_B в $L_2(\Omega)$: если $u_j \to u$ и $A_B u_j \to f$ в $L_2(\Omega)$, то $u \in H_B^{2l}(\Omega)$ и $A_B u = f$.

Аналогично обстоит дело с оператором $(A^*)_C$, отвечающим сопряженной задаче.

Операторы A_B и $(A^*)_C$ связаны формулой

$$(A_B u, v)_\Omega = (u, (A^*)_C v)_\Omega \tag{7.3.10}$$

на своих областях определения, и это взаимно сопряженные операторы в $L_2(\Omega)$. Ситуация аналогична рассмотренной в предложении 6.3.1. Как и там, получается следующее утверждение.

Следствие 7.3.4. *При тех же предположениях ортогональное дополнение к области значений оператора A_B в $L_2(\Omega)$ совпадает с ядром оператора $(A^*)_C$, а ортогональное дополнение к области значений оператора $(A^*)_C$ — с ядром оператора A_B.*

7.4. Спектральные задачи. Простейшая спектральная задача для эллиптического уравнения со спектральным параметром внутри области (т. е. содержащимся в этом уравнении) имеет вид

$$Au(x) = \lambda u(x) \ \text{ в } \ \Omega, \tag{7.4.1}$$

$$B_j u(x) = 0 \ \text{ на } \ \Gamma \quad (j = 1, \ldots, l). \tag{7.4.2}$$

Мы используем обозначения из предыдущего пункта и считаем, что выполнены сделанные там предположения: это эллиптическая задача для оператора $A = a(x, D)$ порядка $2l$ с нормальной системой граничных условий порядков $r_j < 2l$. Задаче сопоставляется неограниченный оператор A_B в $L_2(\Omega)$ с областью определения $D(A_B) = H_B^{2l}(\Omega)$. Этот же оператор можно рассматривать как ограниченный фредгольмов оператор из $H_B^{2l}(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Если задача однозначно разрешима при некотором $\lambda = \lambda_0$, то это оператор с дискретным спектром. Тогда все корневые функции оказываются бесконечно гладкими.

Проще всего формально самосопряженные задачи, и они особенно важны в приложениях. Соответствующий оператор A_B является тогда самосопряженным в $L_2(\Omega)$:

$$(A_B u, v)_\Omega = (u, A_B v)_\Omega \quad (u, v \in D(A_B)). \tag{7.4.3}$$

Его собственные значения вещественны, и для них найдена асимптотика, что было очень непросто и потребовало усилий многих математиков в течение долгого времени. Если главный символ положителен, то для собственных значений (они в этом случае положительны, по крайней мере начиная с некоторого номера), занумерованных натуральными числами в порядке неубывания с учетом кратностей, при $k \to \infty$ мы имеем

$$\lambda_k \sim c k^{2l/n}, \tag{7.4.4}$$

где постоянная c вычисляется через главный символ $a_0(x, \xi)$. Оптимальная оценка остаточного члена в этой асимптотике, т. е. разности левой и правой части, в общем случае имеет вид $O(k^{(2l-1)/n})$. (В матричном случае, если главный символ не является знакоопределенным, то аналогичная асимптотика имеет место отдельно для положительных и для отрицательных собственных значений.)

В $L_2(\Omega)$ имеется ортонормированный базис из собственных функций, и он остается базисом в области определения $H_B^{2l}(\Omega)$ оператора A_B.

Если оператор A_B не является самосопряженным, то $(A^*)_C$ — сопряженный к нему оператор.

Оператор A_B можно назвать *близким к самосопряженному* (или *слабым возмущением самосопряженного оператора* $\frac{1}{2}(A_B + A_B^*)$), если операторы A и A^* имеют общий главный символ и системы граничных операторов для них совпадают. В этом случае сколь угодно узкие вертикальные углы, симметричные относительно вещественной оси, содержат спектры операторов A_B и A_B^* за возможным исключением конечного числа собственных значений. (Более того, собственные значения, кроме конечного их числа, лежат в некоторых «параболических окрестностях» лучей $\mathbb{R}_\pm$.) Указанная выше асимптотика собственных значений сохраняется. При положительном главном символе почти все (все, кроме, возможно, конечного их числа) собственные значения лежат в правом угле (правой параболической окрестности). Эллиптичность с параметром имеет место вдоль любого луча, кроме $\mathbb{R}_{\pm}$, а при положительном главном символе — кроме $\mathbb{R}_{+}$.

Если самосопряженности нет, то возникает вопрос об условиях *полноты корневых функций* оператора A_B в $L_2(\Omega)$ и в $D(A_B)$, т. е. плотности их линейных комбинаций в этих пространствах. Укажем условие, достаточное для полноты (в тех же пространствах). Оно состоит в наличии лучей эллиптичности с параметром с углами между соседними лучами, не превосходящими $2l\pi/n$. В частности, это условие выполнено для операторов, близких к самосопряженным.

Полнота получается также в некоторых других пространствах, в том числе в промежуточных пространствах, получаемых из $L_2(\Omega)$ и $D(A_B)$ комплексной интерполяцией (которая будет объяснена в § 13). В самосопряженном случае там получается базисность.

Отдельный вопрос — выяснение условий, при которых из корневых функций несамосопряженного эллиптического оператора можно построить систему, сохраняющую какие-либо свойства типа базисности. На этом мы здесь не останавливаемся. Содержание настоящего пункта мы предполагаем подробно обсуждать в [3].

Примеры. Рассмотрим спектральную задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$-\Delta u = \lambda u \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{7.4.5}$$

Соответствующий оператор обозначим через $-\Delta_D$. Это самосопряженный оператор с дискретным спектром, состоящим из положительных собственных значений конечной кратности, стремящихся к $+\infty$ с асимптотикой $ck^{2/n}$. Самосопряженность следует из формулы Грина для оператора Лапласа

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot \bar{v}\, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \bar{v}\, dx - \int_\Gamma \partial_\nu u \cdot \bar{v}\, dS. \tag{7.4.6}$$

Здесь ∂_ν — производная по внешней нормали. Действительно, из (7.4.6) получается, что при $u, v \in H^2(\Omega)$, $u = v = 0$ на Γ

$$(\Delta u, v)_{0,\Omega} = (u, \Delta v)_{0,\Omega}. \tag{7.4.7}$$

Из формулы (7.4.6) следует также положительность собственных значений. Действительно, полагая $v = u$, получаем при $\lambda \leqslant 0$ и нулевом граничном значении, что $\nabla u = 0$ почти всюду в Ω и, значит, всюду, так что $u \equiv \mathrm{const}$ в Ω, откуда $u \equiv 0$, поскольку $u = 0$ на границе.

Аналогично обстоит дело со спектральной задачей Неймана для уравнения Лапласа

$$-\Delta u = \lambda u \text{ в } \Omega, \quad \partial_\nu u = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{7.4.8}$$

Соответствующий оператор в $L_2(\Omega)$ обозначим через $-\Delta_N$. Это самосопряженный оператор с дискретным спектром, состоящим из неотрицательных собственных значений, стремящихся к $+\infty$ с той же асимптотикой. Число 0 является собственным значением, ему отвечает одномерное пространство собственных функций, состоящее из постоянных. Самосопряженность и отсутствие отрицательных собственных значений снова следуют из формулы Грина.

Интересны и полезны также спектральные эллиптические задачи со спектральным параметром в граничном условии. Рассмотрим такую задачу для эллиптического уравнения второго порядка (например, для уравнения Лапласа)

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega, \quad \partial_\nu u = \lambda u \text{ на } \Gamma, \tag{7.4.9}$$

Это спектральная *задача Пуанкаре—Стеклова*. Ср. с [287] и [50].

Пусть задача Дирихле для уравнения $Lu = 0$ однозначно разрешима. Тогда задача Пуанкаре—Стеклова приводится к спектральному уравнению на границе Γ. Обозначим через D_Γ оператор, переводящий правую часть граничного условия Дирихле для решений однородного уравнения в правую часть граничного условия Неймана:

$$u|_\Gamma \mapsto u \mapsto \partial_\nu u. \tag{7.4.10}$$

Здесь по правой части g граничного условия задачи Дирихле строится решение этой задачи, от которого берется граничное значение нормальной производной. По-английски D_Γ называется *Dirichlet-to-Neumann operator*. Он действует ограниченным образом из $H^{s-1/2}(\Gamma)$ в $H^{s-3/2}(\Gamma)$, $s > 3/2$.

Если задача Неймана однозначно разрешима, то можно ввести оператор N_Γ, переводящий правую часть граничного условия Неймана в правую часть условия Дирихле. Это *Neumann-to-Dirichlet operator*. Он действует ограниченным образом из $H^{s-3/2}(\Gamma)$ в $H^{s-1/2}(\Gamma)$ и компактен ввиду компактности вложения второго пространства в первое. Если обе задачи, Дирихле и Неймана, однозначно разрешимы, то D_Γ и N_Γ — взаимно обратные операторы. Эти операторы играют важную роль в теории обратных задач для эллиптических уравнений (см., например, [325]). Мы можем называть эти операторы *операторами Дирихле и Неймана*.

В теории псевдодифференциальных операторов выясняется, что D_Γ — *эллиптический псевдодифференциальный оператор порядка* 1. Это будет объяснено в [3]. В частности, это позволяет положить $s=3/2$ и рассматривать D_Γ как *неограниченный* оператор в $L_2(\Gamma)$ с областью определения $H^1(\Gamma)$. Задача (7.4.9) сводится к уравнению

$$(D_\Gamma - \lambda I)\varphi = 0, \tag{7.4.11}$$

где $\varphi = u|_\Gamma$.

Оба оператора в случае уравнения $-\Delta u + \mu u = 0$, с вещественным μ, отличным от собственных значений задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа, оказываются самосопряженными в $L_2(\Gamma) = H^0(\Gamma)$; это следует из вытекающего из формулы Грина соотношения

$$\int\limits_\Gamma \partial_\nu u \cdot \bar v \, dS = \int\limits_\Gamma u \cdot \partial_\nu \bar v \, dS. \tag{7.4.12}$$

Спектр оператора D_Γ дискретен и состоит из собственных значений конечной кратности, стремящихся к $+\infty$ с асимптотикой $c'k^{1/(n-1)}$. Собственные функции (решения однородного уравнения $(D_\Gamma - \lambda I)\varphi = 0$) принадлежат $C^\infty(\Gamma)$ (если граница бесконечно гладкая). Из них можно составить ортонормированный базис в $L_2(\Gamma)$, остающийся, как можно показать, базисом во всех пространствах $H^s(\Gamma)$.

К аналогичным задачам мы вернемся в § 11 в контексте теории сильно эллиптических систем 2-го порядка в липшицевых областях.

Более подробную информацию о спектральных эллиптических задачах со ссылками на литературу можно найти в обзорах [45,101,120].

7.5. Некоторые обобщения.

1. Общие эллиптические задачи можно рассматривать для систем эллиптических уравнений в частных производных, в том числе для систем, эллиптических по Дуглису—Ниренбергу. См., например, [179] и [56, 57]. Принципиально в этом нет ничего нового, нужно только адекватно выбирать пространства для решений и правых частей.

Задача Дирихле для эллиптических систем с однородной относительно дифференцирования старшей частью четного порядка не всегда эллиптична и поэтому не всегда фредгольмова. Пример нефредгольмовой задачи Дирихле впервые указал А. В. Бицадзе [122].

Это задача для 2×2-системы на плоскости с матрицей

$$\begin{pmatrix} \partial_1^2 - \partial_2^2 & 2\partial_1\partial_2 \\ -2\partial_1\partial_2 & \partial_1^2 - \partial_2^2 \end{pmatrix}. \tag{7.5.1}$$

Имеются упрощенные формы условия Лопатинского для матричной задачи Дирихле, по существу принадлежащие Я. Б. Лопатинскому [149], в терминах главного символа $a_0(x, \xi)$ системы, см. [61] и [100]. В частности, для эллиптичности задачи Дирихле необходима и достаточна его факторизуемость:

$$a_0(x, \xi', \zeta) = a_-(x, \xi', \zeta)a_+(x, \xi', \zeta). \tag{7.5.2}$$

Здесь x — точка границы, ось x_n направлена по нормали к ней и нули ζ определителей матриц a_+ и a_- при $\xi' \neq 0$ лежат соответственно в верхней и нижней полуплоскости. Другое, эквивалентное условие мы укажем здесь для системы 2-го порядка. Оно состоит в том, что интеграл

$$\int_\gamma e^{i\zeta t} a_0^{-1}(x, \xi', \zeta)\, d\zeta \tag{7.5.3}$$

по контуру, охватывающему все корни ζ определителя матрицы $a_0(x, \xi', \zeta)$ в верхней полуплоскости, является невырожденной матрицей при $\xi' \neq 0$.

2. Задачи для систем можно рассматривать на гладком компактном многообразии с гладким краем. Вместо вектор-функций можно рассматривать сечения векторных расслоений. См., например, [56, 57].

3. Задачи, эллиптические с параметром, можно рассматривать в более общей форме, когда эллиптический оператор и граничные операторы полиномиально зависят от параметра. См., например, [180] и [112]. Интересны и соответствующие спектральные задачи, им посвящена обширная литература. См., например, [35].

4. Ослабив предположения о гладкости, можно рассматривать задачи в пространствах с индексом s, изменяющимся на конечном промежутке.

5. Имеется обширная теория дифференциальных эллиптических операторов на многообразиях с особенностями типа конических точек, ребер и т. п., а также граничных эллиптических задач в областях с границами, имеющими такие особенности. Вне

этих особенностей многообразие или граница считаются гладкими. Эта теория существенно сложнее. Вводятся и используются пространства, специальным образом связанные с этими особенностями. Изучается асимптотическое поведение решений вблизи особенностей. См. основополагающую работу В. А. Кондратьева [141] и монографии Дож [73], С. А. Назарова—Б. А. Пламеневского [40,90] и В. А. Козлова—В. Г. Мазьи—Россмана [82, 83].

§ 8. Сильно эллиптические уравнения и вариационные задачи

В теории эллиптических задач имеется другой подход, и он был разработан до появления общей теории эллиптических задач, описанной в предыдущем параграфе. На простейших задачах он объясняется в учебниках математической физики, см., например, [27], [60]; см. также книгу [38]. Он является менее общим в том смысле, что требует наличия связанной с данным эллиптическим уравнением квадратичной «энергетической» формы, имеющей положительно определенную действительную часть. Это условие сильной эллиптичности. Оно выполнено для многих уравнений, часто встречающихся в приложениях.

В случае гладкой границы и гладких коэффициентов этот подход быстрее приводит к теоремам об однозначной разрешимости или фредгольмовости задачи, но в пространствах с меньшей гладкостью (что само по себе интересно), а доказательство гладкости решений при гладких правых частях требует дополнительных усилий. Этот случай рассматривается в настоящем параграфе.

Особенно эффективен этот подход в случае негладких коэффициентов (см. ниже замечание 8.1.6) и негладкой (например, липшицевой) границы. Сильно эллиптические системы 2-го порядка в липшицевых областях будут рассмотрены в §§ 11 и 12.

В контексте нашей книги в этом подходе прежде всего интересен выбор пространств функций.

Мы сначала подробно рассмотрим задачи Дирихле и Неймана для скалярного уравнения 2-го порядка, затем укажем обобщения на системы высших порядков.

8.1. Задачи Дирихле и Неймана для скалярного уравнения 2-го порядка. Пусть Ω — ограниченная область с границей Γ. Сейчас для простоты она предполагается бесконечно гладкой. Рассмотрим в Ω скалярное уравнение второго порядка со старшей частью, записанной *в дивергентной форме*:

$$Lu = f, \tag{8.1.1}$$

где

$$Lu(x) = -\sum_{j,k=1}^{n} \partial_j a_{j,k}(x)\partial_k u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\partial_j u(x) + c(x)u(x). \tag{8.1.2}$$

Коэффициенты — комплекснозначные, вообще говоря, функции; сейчас, опять же для простоты, они предполагаются бесконечно гладкими в $\overline{\Omega}$; ∂_j — частные производные $\partial/\partial x_j$. Можно принять, хотя это и не обязательно, что

$$a_{j,k}(x) = a_{k,j}(x) \quad (j \neq k). \tag{8.1.3}$$

Это условие означает, что после дифференцирования в первой сумме коэффициенты в подобных членах одинаковы. Если дополнительно $a_{j,k} = \overline{a_{k,j}}$ (так что $a_{j,k}$ вещественны), $b_j = 0$ и $c = \bar{c}$, то мы имеем формально самосопряженное уравнение. Первую сумму можно переписать в виде

$$\nabla a(x)\nabla u(x) = \operatorname{div} a(x) \operatorname{grad} u(x), \tag{8.1.4}$$

где $a(x)$ — симметричная (но не обязательно вещественная) матрица размеров $n \times n$ с элементами $a_{j,k}(x)$. Дивергенция берется от произведения $a(x) \operatorname{grad} u(x)$.

На старшую часть мы наложим условие *сильной эллиптичности*. Оно принадлежит М. И. Вишику [126] и состоит в том, что форма

$$a(x, \xi) = \sum a_{j,k}(x)\xi_j\xi_k \tag{8.1.5}$$

с вещественными $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет положительно определенную действительную часть, т. е. форма

$$\operatorname{Re} a(x, \xi) = \sum \frac{a_{j,k}(x) + \overline{a_{j,k}(x)}}{2}\, \xi_j\xi_k \tag{8.1.6}$$

является положительно определенной. Более точно, мы предположим, что выполнено равномерное по (x, ξ) условие

$$\operatorname{Re} a(x, \xi) \geqslant C_0|\xi|^2 \quad (x \in \overline{\Omega}), \tag{8.1.7}$$

где C_0 — положительная постоянная.

Для комплексного вектора $\zeta = \xi + i\eta$ форму $a(x,\zeta)$ определим равенством

$$a(x,\zeta) = \sum a_{j,k}(x)\zeta_k\overline{\zeta_j}. \tag{8.1.8}$$

Тогда при условии (8.1.3) имеем

$$a(x,\zeta) = a(x,\xi) + a(x,\eta),$$

так что неравенство (8.1.7) обобщается на комплексные ζ:

$$\operatorname{Re} a(x,\zeta) \geqslant C_0|\zeta|^2. \tag{8.1.9}$$

При вещественных $a_{j,k}(x) = a_{k,j}(x)$ сильная эллиптичность следует из условия эллиптичности $a(x,\xi) \neq 0$. Наоборот, эллиптичность всегда следует из сильной эллиптичности. Повторяем, что сильную эллиптичность мы здесь предполагаем.

Важнейшие задачи для уравнения (8.1.1) — задача Дирихле с граничным условием

$$u^+(x) = g(x) \ \text{ на } \ \Gamma \tag{8.1.10}$$

и задача Неймана. Чтобы записать граничное условие Неймана, введем так называемую *конормальную производную*. Пусть $\nu = \nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ — единичный вектор внешней нормали к границе Γ в ее точке x. Если функция $u(x)$ гладкая (достаточно предположить ее принадлежащей $H^s(\Omega)$ с $s > 3/2$), то положим

$$T^+u(x) = \sum_{j=1}^{n} \nu_j(x) a_{j,k}(x)\gamma^+\partial_k u(x) \tag{8.1.11}$$

на Γ. Это и есть конормальная производная для уравнения (8.1.1). Граничное условие Неймана записывается в виде

$$T^+u(x) = h(x) \ \text{ на } \ \Gamma. \tag{8.1.12}$$

Конормальная производная теснее связана с уравнением, чем обычная нормальная производная (см. ниже формулы Грина). В случае уравнения Лапласа она совпадает с нормальной производной.

Обе задачи эллиптичны: в отношении задачи Дирихле мы уже отмечали это в п. 7.1, а эллиптичность задачи Неймана легко проверяется (поворотом системы координат, при котором ∂_n становится производной по нормали).

Более того, *эти задачи эллиптичны с параметром в угле с биссектрисой $\mathbb{R}_-$ раствора $\pi + \varepsilon$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$*. Почему здесь угол эллиптичности с параметром шире левой полуплоскости, объясняется так: условие сильной эллиптичности сохраняется по непрерывности при замене $a_{j,k}(x)$ на $e^{i\theta}a_{j,k}(x)$ с достаточно малым $|\theta|$.

Введем форму

$$\Phi_\Omega(u,v)=\int\limits_\Omega\Big[\sum_{j,k}a_{j,k}\partial_k u\cdot\partial_j\bar v+\sum_j b_j\partial_j u\cdot\bar v+cu\bar v\Big]\,dx. \tag{8.1.13}$$

Первую сумму здесь можно переписать в виде

$$a(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\overline{v(x)}=a(x)\operatorname{grad}u(x)\cdot\operatorname{grad}\overline{v(x)}. \tag{8.1.14}$$

Если $u\in H^2(\Omega)$ и $v\in H^1(\Omega)$, то интегрированием по частям получается *первая формула Грина*

$$(Lu,v)_\Omega=\Phi_\Omega(u,v)-(T^+u,v^+)_\Gamma. \tag{8.1.15}$$

Здесь $(u,v)_\Omega$ и $(\varphi,\psi)_\Gamma$ — стандартные скалярные произведения в $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$. Формально сопряженный к L оператор для дальнейшего будет удобнее обозначать через $\widetilde{L}$; он записывается формулой

$$\widetilde{L}v=-\sum_{j,k=1}^n\partial_j\overline{a_{k,j}(x)}\partial_k v(x)-\sum\overline{b_j(x)}\partial_j v(x)+\\+\big[\overline{c(x)}-\sum\partial_j\overline{b_j(x)}\big]v(x). \tag{8.1.16}$$

Первую формулу Грина для него мы хотим иметь с той же формой $\Phi_\Omega(u,v)$:

$$(u,\widetilde{L}v)_\Omega=\Phi_\Omega(u,v)-(u^+,\widetilde{T}^+v)_\Gamma. \tag{8.1.17}$$

Соответствующая конормальная производная от функции $v\in H^s(\Omega)$, $s>3/2$, имеет тогда вид

$$\widetilde{T}^+v(x)=\sum_{j,k}\nu_j(x)\overline{a_{k,j}(x)}\gamma^+\partial_k v(x)+\sum\nu_j(x)\overline{b_j(x)}v^+(x). \tag{8.1.18}$$

Формула (8.1.17) выводится при $u\in H^1(\Omega)$, $v\in H^2(\Omega)$. Из первых формул Грина (8.1.15) и (8.1.17) при $u,v\in H^2(\Omega)$ вытекает *вторая формула Грина*

$$(Lu,v)_\Omega-(u,\widetilde{L}v)_\Omega=(u^+,\widetilde{T}^+v)_\Gamma-(T^+u,v^+)_\Gamma. \tag{8.1.19}$$

При $s>3/2$ предельным переходом можно распространить формулу (8.1.15) на $u\in H^s(\Omega)$, $v\in H^1(\Omega)$, формулу (8.1.17) — на $u\in H^1(\Omega)$, $v\in H^s(\Omega)$ и формулу (8.1.19) — на $u,v\in H^s(\Omega)$. Для этого функции из $H^s(\Omega)$ аппроксимируем функциями из $H^2(\Omega)$.

Хотя мы в этом параграфе предполагаем границу и коэффициенты гладкими, представляет большой интерес рассмотрение уравнений с негладкими правыми частями, их решения — функции малой гладкости. Возможность такого рассмотрения предоставляет исходная «слабая» постановка задач Дирихле и Неймана, которую мы сейчас опишем. Речь идет о слабых решениях.

Сначала предположим граничные условия в этих задачах однородными, т. е. имеющими нулевые правые части.

Задача Дирихле записывается тогда равенством

$$(f,v)_\Omega = \Phi_\Omega(u,v). \tag{8.1.20}$$

Здесь v — любая «пробная» функция. Функции u, v, f принадлежат следующим пространствам:

$$u, v \in \widetilde{H}^1(\Omega), \quad f \in H^{-1}(\Omega). \tag{8.1.21}$$

При этом форма $(f,v)_\Omega$ рассматривается как продолженная на прямое произведение $H^{-1}(\Omega) \times \widetilde{H}^1(\Omega)$. Выбор пространства для u и v связан с однородностью условия Дирихле: напомним, что $\widetilde{H}^1(\Omega)$ отождествляется с $\mathring{H}^1(\Omega)$.

Задача Неймана с однородным граничным условием тоже записывается равенством (8.1.20), но с

$$u, v \in H^1(\Omega), \quad f \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega). \tag{8.1.22}$$

Таким образом, нам здесь понадобились пространства с отрицательными индексами. В обоих случаях f и u, v принадлежат пространствам, взаимно сопряженным относительно (продолженной) формы $(f,v)_\Omega$. Отметим, что форма $\Phi_\Omega(u,v)$ ограничена на $H^1(\Omega)$ и, в частности, на $\widetilde{H}^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} |\Phi_\Omega(u,v)| &\leqslant C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (u, v \in H^1(\Omega)), \\ |\Phi_\Omega(u,v)| &\leqslant C_1 \|u\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)} \|v\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)} \quad (u, v \in \widetilde{H}^1(\Omega)). \end{aligned} \tag{8.1.23}$$

Оператор L в случае задачи Дирихле с однородным граничным условием действует ограниченным образом из пространства $\widetilde{H}^1(\Omega)$ функций u в пространство $H^{-1}(\Omega)$ функций f. Действительно, в этом случае

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant C_2 \sup_{v \neq 0} \frac{|(f,v)_\Omega|}{\|v\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}} = C_2 \sup_{v \neq 0} \frac{|\Phi_\Omega(u,v)|}{\|v\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}} \leqslant C_3 \|u\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}.$$

В случае задачи Неймана с однородным граничным условием аналогично проверяется, что L — ограниченный оператор из $H^1(\Omega)$ в $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$.

На первый взгляд, несколько странно, что функции u и f принадлежат пространствам разных классов: H и $\widetilde{H}$. Но именно так «устроена жизнь» в рассматриваемом классе задач, когда правые части находятся в пространствах с отрицательными индексами. Ср. с теоремой Лакса—Мильграма в п. 17.2. Напомним также, что пространства $H^s(\Omega)$ и $\widetilde{H}^s(\Omega)$ можно отождествить при $|s| < 1/2$ (см. п. 5.1). В п. 13.8 мы увидим, что по этой причине пространства для u и f лежат в одной интерполяционной шкале.

Рассмотрим подробнее сначала задачу Дирихле.

Теорема 8.1.1. *Для сильно эллиптического оператора* (8.1.2) *существуют такие постоянные* $C_4 > 0$ *и* $C_5 \geqslant 0$, *что для функций из* $\widetilde{H}^1(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)} \leqslant C_4 \operatorname{Re}\Phi_\Omega(u,u) + C_5\|u\|^2_{H^0(\Omega)}. \tag{8.1.24}$$

Это так называемое *неравенство Гординга*. Его справедливость выражают также словами: форма $\Phi_\Omega(u,u)$ *коэрцитивна на* $\widetilde{H}^1(\Omega)$.

Доказательство в скалярном случае при условии (8.1.9) (вытекающем, как мы видели, из (8.1.7) и (8.1.3)) совсем простое. Подстановкой $\zeta_j = \partial_j u(x)$ в неравенство (8.1.9) и интегрированием по x получается неравенство

$$\sum \|\partial_j u\|^2_{H^0(\Omega)} \leqslant C_4 \operatorname{Re}\Phi_{0,\Omega}(u,u),$$

где $\Phi_{0,\Omega}$ — главная часть формы Φ_Ω:

$$\Phi_{0,\Omega}(u,v) = \int_\Omega a(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\overline{v(x)}\,dx. \tag{8.1.25}$$

Если все коэффициенты b_j равны нулю, то сразу получается нужный результат. Если же среди b_j есть ненулевые коэффициенты, то дополнительно надо воспользоваться неравенствами (5.1.9). □

Если $\operatorname{Re} c(x)$ достаточно большое (или если $c(x)$ заменено на $c(x) - \lambda$ и $\mu = -\operatorname{Re}\lambda$ достаточно большое), то оценка вида (8.1.24) справедлива с $C_5 = 0$:

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)} \leqslant C_4 \operatorname{Re}\Phi_\Omega(u,u). \tag{8.1.26}$$

Далее мы как правило будем считать для простоты, что располагаем именно этой оценкой. Это неравенство назовем *сильным неравенством Гординга*, или *сильным условием коэрцитивности для* Φ_Ω *на* $\widetilde{H}^1(\Omega)$. При этом условии, как мы сейчас увидим, получается однозначная разрешимость задачи (вместо фредгольмовости). Из равенства (8.1.20) следует, что

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)} \leqslant C_6\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)},$$

и поэтому мы имеем *априорную оценку*

$$\|u\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)} \leqslant C_6\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}. \tag{8.1.27}$$

Из нее следует единственность решения задачи Дирихле.

Выше мы уже отметили, что справедливо и неравенство в обратную сторону. Поэтому получается *двусторонняя оценка*:

$$\|u\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)} \leqslant C_6\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant C_7\|u\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}. \tag{8.1.28}$$

Это говорит о том, что выбранные пространства адекватны рассматриваемой задаче.

Далее, из оценки (8.1.26) выводится существование решения задачи при любой правой части f. В важном частном случае, когда уравнение формально самосопряженное, так что

$$\overline{\Phi_\Omega(u,v)} = \Phi_\Omega(v,u), \tag{8.1.29}$$

это получается по теореме Ф. Рисса: форма $\Phi_\Omega(u,v)$ обладает тогда свойствами скалярного произведения, что позволяет представить функционал $(f,v)_\Omega$ в виде $\Phi_\Omega(u,v)$. Но и без этого предположения форма $\Phi_\Omega(u,v)$ с фиксируемой функцией u выражает общий вид непрерывного антилинейного функционала над $\widetilde{H}^1(\Omega)$, однозначно определяющего u, в силу теоремы Лакса—Мильграма (см. п. 17.2). Получается теорема существования и единственности:

Теорема 8.1.2. *Если справедливо неравенство* (8.1.26)*, то задача Дирихле $Lu=f$ в Ω, $u^+=0$ имеет одно и только одно слабое решение в $\widetilde{H}^1(\Omega)$ при любой правой части $f\in H^{-1}(\Omega)$ с априорной оценкой* (8.1.27).

Замечание 8.1.3. Чтобы иметь неравенство (8.1.26), не обязательно предполагать, что уравнение содержит свободный член. Например, в случае уравнения Пуассона $-\Delta u=f$ можно воспользоваться известным *неравенством Фридрихса* (см., например, [27] или [165]): для функций, равных нулю на Γ,

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C_\Omega\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{8.1.30}$$

Задача Дирихле в этом случае, как хорошо известно, однозначно разрешима. Неравенство Фридрихса верно и в L_p-нормах.

На случай неоднородного граничного условия $u^+ = g \in H^{1/2}(\Gamma)$ (в этом случае решение ищется в $H^1(\Omega)$) результат об однозначной разрешимости задачи Дирихле распространяется следующим образом: из решения вычитается функция $u_0 \in H^1(\Omega)$ с заданным граничным значением g. Для разности $u - u_0$ получается только что рассмотренная задача. Сказанное здесь мы подробно объясним в п. 11.1.

Если рассматривается уравнение с параметром

$$Lu - \lambda u = f \tag{8.1.31}$$

вместо (8.1.1), то при достаточно больших $\mu = -\operatorname{Re}\lambda$, как сейчас мы проверим, получается равномерная по параметру оценка

$$\|u\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)} + \mu\|u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}, \tag{8.1.32}$$

похожая на (7.1.21). Это можно сопоставить со сделанным перед формулой (8.1.13) замечанием об эллиптичности задач с параметром.

Чтобы получить оценку (8.1.32), заметим следующее. Неравенство (8.1.26) останется в силе, если под знаком Re к $\Phi_\Omega(u,u)$ добавить $-(\lambda u, u)_\Omega$. Но

$$\Phi_\Omega(u,u) - \lambda(u,u)_\Omega = (f,u)_\Omega.$$

Поэтому

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)},$$

что дает нужную оценку первого слагаемого слева в (8.1.32). Далее,

$$\mu\|u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|Lu\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

а последнее слагаемое здесь оценивается через только что оцененное первое слагаемое слева в (8.1.32). Это дает оценку второго слагаемого слева в (8.1.32).

Более того, оценка вида (8.1.32) справедлива с $|\lambda|$ вместо μ,

$$\|u\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)} + |\lambda|\|u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}, \tag{8.1.33}$$

вне любого угла с вершиной в начале, содержащего внутри себя угол, в котором лежат значения квадратичной формы $\Phi_\Omega(u,u)$. Чтобы получить эту оценку, надо воспользоваться возможностью умножения формы $\Phi_\Omega(u,u)$ на $e^{i\theta}$ с достаточно малыми $|\theta|$.

Перейдем к задаче Неймана. В этом случае требуется аналогичное (8.1.24) неравенство для функций из $H^1(\Omega)$:

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant C_4 \operatorname{Re}\Phi_\Omega(u,u) + C_5\|u\|^2_{H^0(\Omega)}. \tag{8.1.34}$$

В рассматриваемом сейчас скалярном случае с условием (8.1.3) неравенство (8.1.34) получается в точности таким же образом, как выше. Будем говорить, что *форма* $\Phi_\Omega(u,v)$ *коэрцитивна на* $H^1(\Omega)$. При достаточно большом $\operatorname{Re} c(x)$ оно верно с $C_5=0$:

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant C_4 \operatorname{Re} \Phi_\Omega(u,u). \tag{8.1.35}$$

Это неравенство назовем *сильным условием коэрцитивности для формы* Φ_Ω *на* $H^1(\Omega)$. Имея (8.1.35), можно почти без изменений повторить для задачи Неймана сказанное выше про задачу Дирихле. Получается

Теорема 8.1.4. *Если справедливо неравенство* (8.1.35), *то задача Неймана* $Lu=f$ *в* Ω, $T^+u=0$ *на* Γ *имеет одно и только одно слабое решение в* $H^1(\Omega)$ *при любой правой части* $f\in\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ *с априорной оценкой*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_6\|f\|_{\widetilde{H}^{-1}(\Omega)}. \tag{8.1.36}$$

Снова имеет место двусторонняя оценка. Верна и оценка с параметром, аналогичная (8.1.33).

Для слабой постановки задачи Неймана с неоднородным граничным условием нужна полная формула Грина

$$(f,v)_\Omega = \Phi_\Omega(u,v)-(h,v^+)_\Gamma \quad (v\in H^1(\Omega)). \tag{8.1.37}$$

Здесь $f\in\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$, так что f и v находятся в сопряженных пространствах. Далее, $v^+\in H^{1/2}(\Gamma)$, поэтому $h\in H^{-1/2}(\Gamma)$, $(h,v^+)_\Gamma$ — непрерывный антилинейный функционал над $H^{1/2}(\Gamma)$ и, значит, над $H^1(\Omega)$.

Несколько неожиданным может показаться следующее обстоятельство. Для функций $u, v\in H^1(\Omega)$ доказать формулу Грина (8.1.15), или (8.1.37), мы уже не можем. Дело в том, что в рамках известной нам теоремы о следах выражение (8.1.11) для функции из $H^1(\Omega)$, вообще говоря, лишено смысла. Далее, правая часть $Lu=f$ уравнения однозначно определяется заданием u как обобщенная функция только внутри области Ω. Как элемент пространства (анти)линейных непрерывных функционалов над $H^1(\Omega)$ эта правая часть может содержать составляющую, сосредоточенную на Γ, — функционал вида $(w,v^+)_\Gamma$, где $w\in H^{-1/2}(\Gamma)$. Но такую составляющую можно перенести (или не переносить) в граничное слагаемое в (8.1.37).

Выход из этого положения, принятый в литературе (см., например, [87]), состоит в том, что справедливость формулы Грина (8.1.37) *постулируется*. *Конормальную производную мы теперь* *считаем определенной этой формулой, если нам заданы* $u \in H^1(\Omega)$ *и* $f \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega)$. Она уже, вообще говоря, не выражается формулой (8.1.11). Мы также *будем считать формулу* (8.1.37) *определением решения задачи Неймана с неоднородным граничным условием, если заданы* $f \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ *и конормальная производная* $T^+u = h \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Постановка задачи, таким образом, содержит некоторый произвол: f и h не независимы. Но если f или T^+u реально задано, то соответственно T^+u или f определяется уже однозначно. В частности, две задачи Неймана с $f = 0$ и с $h = 0$ имеют самостоятельное значение.

Добавим, что если известно, что $f \in L_2(\Omega)$, то обычно принимают именно эту функцию f за правую часть уравнения $Lu = f$ в $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$, продолжая ее нулем вне Ω. См. [87, с. 117]. Этим соглашением конормальная производная определяется однозначно. В частности, это относится к случаю, когда $f = 0$ в Ω.

Мы вернемся к этому вопросу в § 11. В п. 11.2 мы предложим способ устранения только что указанного произвола.

Однако полезно знать, что функционал $(T^+u, v^+)_\Gamma$ можно представить в виде $(f_1, v)_\Omega$ с $f_1 \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega)$. Благодаря этому общую задачу Неймана всегда можно свести к рассмотренной выше задаче с однородным граничным условием изменением правой части в уравнении. Поэтому результат об однозначной разрешимости распространяется на случай неоднородного граничного условия.

Конормальную производную, вычисленную по формуле (8.1.11), будем называть *гладкой конормальной производной*.

Для нас сейчас общая задача Неймана особенно интересна тем, что в ее постановке удается задать правую часть граничного условия в пространстве с отрицательным индексом $-1/2$.

Мы еще хотим объяснить термин «вариационная задача». *Это можно сделать, если выполнено условие формальной самосопряженности, или, что то же, условие* (8.1.29), *и форма* $\Phi_\Omega(v, v)$ *неотрицательна*. Рассмотрим функционал

$$\Psi(v) = \operatorname{Re}[\Phi_\Omega(v, v) - 2(f, v)_\Omega]. \tag{8.1.38}$$

Этот функционал достигает наименьшего значения на решении. Действительно, мы имеем

$$\Psi(u + v) - \Psi(u) = \Phi_\Omega(v, v) + 2\operatorname{Re}[\Phi_\Omega(u, v) - (f, v)_\Omega],$$

и если u — решение, то выражение в квадратных скобках равно нулю, так что левая часть неотрицательна.

По этой причине слабые постановки задач Дирихле и Неймана, рассмотренные выше в этом параграфе, называют также вариационными постановками; мы при этом не будем исключать случай, когда нет формальной самосопряженности.

Для исследования гладкости решения при дополнительной гладкости правых частей и границы имеется «метод разностных отношений» Ниренберга [280]. Оказывается, например, что при правой части уравнения из $L_2(\Omega)$ решение принадлежит $H^2(\Omega')$ в любой внутренней подобласти Ω', а если граница — класса C^2, то решение задачи Дирихле принадлежит $H^2(\Omega)$. См. п. 16.5.

Но совсем просто получается следующий результат при бесконечно гладких коэффициентах и границе, он вытекает из согласованности обычной и вариационной эллиптической теории.

Теорема 8.1.5. *Пусть $s \geqslant 2$. Тогда решение задачи Дирихле с $f \in H^{s-2}(\Omega)$ и $g \in H^{s-1/2}(\Gamma)$ принадлежит $H^s(\Omega)$ и является решением в смысле общей теории* (§ 7). *Поэтому оно принадлежит $H^s(\Omega)$. То же верно для решения задачи Неймана при $f \in H^{s-2}(\Omega)$ и $h \in H^{s-3/2}(\Gamma)$.*

Доказательство. Достаточно проверить при $s = 2$, что обычное решение является вариационным решением. Но это элементарно делается интегрированием по частям. Поясним, что здесь f не содержит составляющей с носителем на Γ, конормальная производная гладкая и она определена однозначно. Ввиду единственности вариационного решения оно является обычным и применима известная нам теорема о гладкости решений обычных эллиптических задач. □

Замечание 8.1.6. Представляет самостоятельный интерес вопрос о том, какие результаты справедливы, если коэффициенты уравнения не являются гладкими функциями. Теорема 8.1.1 получается, если коэффициенты в (8.1.2) предположить всего лишь ограниченными измеримыми функциями. Этого же предположения хватает для доказательства теорем 8.1.2 и 8.1.4, если удовлетвориться рассмотрением слабых решений.

Замечание 8.1.7. Остановимся теперь на задаче Дирихле в случае, когда есть сильная эллиптичность, но нет сильной коэрцитивности формы $\Phi_\Omega(u, v)$ на $\widetilde{H}^1(\Omega)$. Пусть L — соответствующий оператор. Тогда для оператора $L_\tau = L + \tau$ условие сильной коэрцитивности выполнено, если τ достаточно велико. Отвечающий исходной задаче Дирихле с однородным граничным условием оператор $\mathcal{L}_D : \widetilde{H}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ оказывается слабым возмущением обратимого оператора $\mathcal{L}_{\tau,D}$. Более точно, их разность — ограниченный оператор в $\widetilde{H}^1(\Omega)$, и он, конечно, компактен как оператор из $\widetilde{H}^1(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega)$. Поэтому $\mathcal{L}_D$ — *фредгольмов оператор с нулевым индексом*. См. предложение 17.1.12. Далее, в силу второй формулы Грина операторы $\mathcal{L}_D$ и $\widetilde{\mathcal{L}}_D$, где $\widetilde{\mathcal{L}}_D$ отвечает задаче Дирихле для формально сопряженного оператора, оказываются сопряженными как операторы в банаховых (в данном случае в гильбертовых) пространствах:

$$(\mathcal{L}_D u, v)_\Omega = (u, \widetilde{\mathcal{L}}_D v)_\Omega \quad (u, v \in \widetilde{H}^1(\Omega)). \tag{8.1.39}$$

Оператор $\widetilde{\mathcal{L}}_D$ тоже фредгольмов с нулевым индексом, и, например, *уравнение* $\mathcal{L}_D u = f \in H^{-1}(\Omega)$ *разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть* f *удовлетворяет условию*

$$(f, v)_\Omega = 0 \tag{8.1.40}$$

для всех решений однородного уравнения $\widetilde{\mathcal{L}}_D v = 0$. См. предложение 17.1.8.

Аналогично обстоит дело с задачей Неймана, если форма $\Phi_\Omega(u, v)$ коэрцитивна на $H^1(\Omega)$, но нет сильной коэрцитивности. *Оператор* $\mathcal{L}_N : H^1(\Omega) \to \widetilde{H}^{-1}(\Omega)$, *отвечающий задаче Неймана с однородным граничным условием, является тогда фредгольмовым оператором с нулевым индексом, и уравнение* $\mathcal{L}_N u = f$ *разрешимо в том и только в том случае, если* f *удовлетворяет условию* (8.1.40) *для всех решений сопряженного однородного уравнения* $\widetilde{\mathcal{L}}_N v = 0$.

Наша теорема 8.1.5 тоже распространяется на фредгольмову ситуацию. Действительно, например, уравнение $\mathcal{L}_D u = f$ достаточно переписать в виде $\mathcal{L}_{\tau,D} u = f + \tau u$ с обратимым оператором слева.

Упомянем здесь, что в теории сильно эллиптических уравнений существенную роль играют *поверхностные потенциалы*. Если $E(x, y)$ — фундаментальное решение, т. е. решение уравнения

$$L_x E(x, y) = \delta(x - y), \tag{8.1.41}$$

то классический *потенциал простого слоя* определяется формулой

$$u(x) = \mathcal{A}\psi(x) = \int_\Gamma E(x, y)\psi(y)\, dS_y, \tag{8.1.42}$$

а *потенциал двойного слоя* — формулой

$$u(x) = \mathcal{B}\varphi(x) = \int_\Gamma [\partial_{\nu_y} E(x, y)]\varphi(y)\, dS_y \quad (x \notin \Gamma). \tag{8.1.43}$$

Пока последнюю мы написали в случае формально самосопряженного оператора L. При этом функции ψ и φ должны обладать некоторой регулярностью. Оба оператора, (8.1.42) и (8.1.43), переводят функции, заданные на границе, в решения однородного уравнения вне границы. Важны также сужения этих операторов на Γ и конормальные производные этих функций на Γ. В случае гладкой границы и гладких коэффициентов в L четыре последних оператора — псевдодифференциальные операторы на Γ, и изучать мы их будем средствами исчисления этих операторов в [3]. В негладком случае имеется упрощенный подход к выводу свойств этих операторов, а также так называемого гиперсингулярного оператора $H = -T^+\mathcal{B}$, основанный на предположении об однозначной разрешимости задач Дирихле и Неймана. Он будет объяснен в § 12 в бóльшей общности: в липшицевых областях для сильно эллиптических систем 2-го порядка. Но там придется начать с ревизии определений этих операторов.

Операторы типа потенциала удобны для решения задач в случае однородного уравнения и неоднородного граничного условия. Мы увидим это в § 12.

К операторам, действующим на границе, можно отнести также оператор Неймана N, переводящий данные Неймана решения однородного уравнения в данные Дирихле, и обратный к нему оператор Дирихле D. При однозначной разрешимости задач Дирихле и Неймана оператор D действует ограниченным образом из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$ и обратим, оператор N — в обратном направлении. Эти два оператора, в другом контексте уже упомянутые в п. 7.4, мы подробнее рассмотрим в § 11.

8.2. Обобщения. Определение сильной эллиптичности обобщается прежде всего на системы второго порядка. Они будут подробно рассмотрены в § 11 и § 12, см. также § 16. Далее — на системы высших порядков со структурой Дуглиса—Ниренберга [229]. Задается одна система целых и для простоты положительных чисел $m_1, \ldots, m_d$. В обозначениях п. 6.5 сейчас $t_j = m_j$. Запишем систему с выделением ее старшей части:

$$Lu(x) = L_0 u(x) + \ldots = f(x). \tag{8.2.1}$$

Вектор-функции $u(x)$ и $f(x)$ — столбцы высоты d:

$$u(x) = (u_1(x), \ldots, u_d(x))', \quad f(x) = (f_1(x), \ldots, f_d(x))'.$$

Операторы L и L_0 — матричные, с размерами матриц $d \times d$. Пусть $L = (L^{r,s})$, $L_0 = (L_0^{r,s})$. Каждый из скалярных операторов $L^{r,s}$ записывается в дивергентной форме:

$$L^{r,s} = L^{r,s}(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leqslant m_r, |\beta| \leqslant m_s} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha [a_{\alpha,\beta}^{r,s}(x) \partial^\beta \cdot\,]. \tag{8.2.2}$$

При этом старшие части этих операторов составляют матрицу L_0:

$$L_0^{r,s} = L_0^{r,s}(x, \partial) = \sum_{|\alpha| = m_r, |\beta| = m_s} (-1)^{m_r} \partial^\alpha [a_{\alpha,\beta}^{r,s}(x) \partial^\beta \cdot\,]. \tag{8.2.3}$$

Условие сильной эллиптичности состоит в следующем:

$$\operatorname{Re} \sum_{r,s=1}^{d} \sum_{|\alpha| = m_r, |\beta| = m_s} a_{\alpha,\beta}^{r,s}(x) \xi^{\alpha+\beta} \zeta_s \overline{\zeta}_r \geqslant C_0 \sum_{j=1}^{d} |\xi|^{2m_j} |\zeta_j|^2, \tag{8.2.4}$$

где C_0 — положительная постоянная. Координаты вектора $\xi = (\xi_1, \ldots \ldots, \xi_n)$ вещественны, координаты вектора $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_d)'$ комплексные. Определение сильной эллиптичности систем в приведенной здесь общности сформулировано в работе Ниренберга [280]. Функции $a_{\alpha,\beta}^{r,s}(x)$ считаем пока бесконечно гладкими в $\overline{\Omega}$.

Рассмотрим скалярное произведение $(Lu, v)_\Omega$ сначала на финитных бесконечно гладких функциях в Ω. Интегрированием по частям получается формула

$$(f, v)_\Omega = \Phi_\Omega(u, v), \tag{8.2.5}$$

где Φ_Ω — форма

$$\Phi_\Omega(u, v) = \int_\Omega \sum_{r,s=1}^{d} \sum_{|\alpha| \leqslant m_r, |\beta| \leqslant m_s} a_{\alpha,\beta}^{r,s}(x) \partial^\beta u_s(x) \overline{\partial^\alpha v_r(x)}\, dx \tag{8.2.6}$$

со старшей частью

$$\int_\Omega \sum_{r,s=1}^{d} \sum_{|\alpha| = m_r, |\beta| = m_s} a_{\alpha,\beta}^{r,s}(x) \partial^\beta u_s(x) \overline{\partial^\alpha v_r(x)}\, dx. \tag{8.2.7}$$

Прежде всего важны и интересны задачи Дирихле и Неймана в слабой постановке с однородными граничными условиями. В задаче Дирихле

$$u_j, v_j \in \widetilde{H}^{m_j}(\Omega), \quad f_k \in H^{-m_k}(\Omega). \tag{8.2.8}$$

Задачей Неймана сейчас называется задача, в которой

$$u_j, v_j \in H^{m_j}(\Omega), \quad f_k \in \widetilde{H}^{-m_k}(\Omega). \tag{8.2.9}$$

Требуется, чтобы соотношение (8.2.5) выполнялось для u, f и произвольных пробных функций v.

Введем пространство

$$H^{\boldsymbol{m}}(\Omega) = H^{m_1}(\Omega) \times \ldots \times H^{m_d}(\Omega). \tag{8.2.10}$$

В этом пространстве норма имеет вид

$$\|u\|_{H^{\boldsymbol{m}}(\Omega)} = \left(\sum_1^d \|u_j\|^2_{H^{m_j}(\Omega)}\right)^{1/2}. \tag{8.2.11}$$

При $m_1 = \ldots = m_d = m$ будем писать $H^m(\Omega)$. Форма Φ_Ω называется *коэрцитивной* на пространстве (8.2.10), если для всех его элементов справедливо *неравенство*

$$\|u\|^2_{H^{\boldsymbol{m}}(\Omega)} \leqslant C_1 \operatorname{Re} \Phi_\Omega(u, u) + C_2 \|u\|^2_{H^0(\Omega)} \tag{8.2.12}$$

с постоянными $C_1 > 0$ и $C_2 \geqslant 0$. При $C_2 = 0$ это *сильная коэрцитивность*. Аналогично определяются коэрцитивность и сильная коэрцитивность на других пространствах V решений.

Самое важное из этих пространств —

$$\widetilde{H}^{\boldsymbol{m}}(\Omega) = \widetilde{H}^{m_1}(\Omega) \times \ldots \times \widetilde{H}^{m_d}(\Omega), \tag{8.2.13}$$

отождествляемое с

$$\mathring{H}^{\boldsymbol{m}}(\Omega) = \mathring{H}^{m_1}(\Omega) \times \ldots \times \mathring{H}^{m_d}(\Omega). \tag{8.2.14}$$

Оно отвечает задаче Дирихле. В отношении более общих V мы будем предполагать, что это подпространства в $H^{\boldsymbol{m}}(\Omega)$, содержащие $\widetilde{H}^{\boldsymbol{m}}(\Omega)$:

$$\widetilde{H}^{\boldsymbol{m}}(\Omega) \subset V \subset H^{\boldsymbol{m}}(\Omega); \tag{8.2.15}$$

решение u системы $Lu = f$ ищется в V, а правая часть f предполагается принадлежащей пространству V', сопряженному к V относительно продолжения скалярного произведения $(f, v)_\Omega$. Из коэрцитивности на $H^{\boldsymbol{m}}(\Omega)$ следует коэрцитивность на всех подпространствах V.

Теорема 8.2.1. *Из сильной эллиптичности оператора L следует его коэрцитивность на $\widetilde{H}^{\boldsymbol{m}}(\Omega)$.*

По существу это результат Гординга [239], хотя в приведенной здесь общности этот факт указан в [280]. В отличие от рассмотренного в п. 8.1 скалярного случая требуется доказательство, но оно несложное и основано на методе замораживания коэффициентов.

В случае $m_1 = \ldots = m_d = 1$, т. е. в случае системы 2-го порядка, мы приведем его в § 11; в общем случае оно проводится аналогично.

Неравенство Гординга становится сильным неравенством Гординга, если форму младшего члена $(cu, u)_\Omega$ предположить имеющей достаточно большую действительную часть:

$$\|u\|^2_{H^m(\Omega)} \leqslant C_1 \operatorname{Re} \Phi_\Omega(u, u). \tag{8.2.16}$$

Теорема 8.2.2. *Если форма Φ_Ω сильно коэрцитивна на пространстве $\widetilde{H}^{\boldsymbol{m}}(\Omega)$, то задача Дирихле однозначно разрешима.*

Это следует из теоремы Лакса—Мильграма.

Если есть только коэрцитивность (не сильная), т. е. только сильная эллиптичность, то вместо однозначной разрешимости получается фредгольмовость.

Существенно сложнее обстоит дело с задачей Неймана и другими задачами. Очень большая литература была посвящена поиску условий, достаточных для коэрцитивности на $H^{\boldsymbol{m}}(\Omega)$ (и других подпространствах V). Литературные указания мы приведем в § 18. В первую очередь полезно смотреть книги [64] и [91]. В § 11 будет указано удобное достаточное условие для коэрцитивности на $H^1(\Omega)$ в случае системы 2-го порядка.

Теорема 8.2.3. *В случае сильной коэрцитивности на $H^{\boldsymbol{m}}(\Omega)$ задача Неймана однозначно разрешима.*

Это снова следует из теоремы Лакса—Мильграма. Если есть коэрцитивность и нет сильной коэрцитивности, то снова получается фредгольмовость.

Бесконечная гладкость коэффициентов в этих теоремах не нужна. Достаточна непрерывность старших коэффициентов и измеримость и ограниченность остальных коэффициентов. Но если есть дополнительная гладкость коэффициентов и границы, то при гладкой f можно исследовать гладкость решения. Для этого, как в п. 8.1, имеются две возможности: метод Ниренберга [280] разностных отношений (см. п. 16.5 и замечания к этому пункту в § 18) и отождествление задачи с соответствующей задачей в общей теории «гладких» эллиптических задач. Нужно только проверять, что для граничных операторов вариационной задачи выполнено условие Лопатинского.

Глава III

Пространства H^s и сильно эллиптические системы 2-го порядка в липшицевых областях

§ 9. Липшицевы области и липшицевы поверхности

9.1. Специфика липшицевых областей и поверхностей. Поверхность Γ в $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$; кривая при $n = 2$) называется *липшицевой*, если локально, в окрестности любой своей точки, она после подходящего поворота системы координат является графиком функции $x_n = \varphi(x')$, удовлетворяющей условию Липшица

$$|\varphi(y') - \varphi(x')| \leqslant C|y' - x'|. \tag{9.1.1}$$

Здесь $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in O$ и $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in O$, где O — скажем, шар в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$; постоянная C не зависит, конечно, от x' и y'. Область Ω в $\mathbb{R}^n$ называется *липшицевой*, если она имеет липшицеву границу. Мы обычно будем считать область Ω ограниченной, в этом случае постоянные C в локальных оценках (9.1.1) для конечного покрытия границы окрестностями ее точек имеют конечный максимум. Нижнюю грань возможных максимумов называют *липшицевой постоянной* поверхности Γ. Область Ω будем считать лежащей под графиком функции $x_n = \varphi(x')$ — кроме § 10, где мы не хотим сильно отклоняться от обозначений в [294].

Замкнутая поверхность класса C^1 «лучше» липшицевой, но ее тоже можно рассматривать как липшицеву. В этом случае постоянную Липшица можно считать нулевой, так как локальные постоянные Липшица сколь угодно малы. Это следует из того, что если координатная плоскость $x_n = 0$ является касательной к графику непрерывно дифференцируемой функции $y = \varphi(x')$ в начале координат, то в этой точке ее первые производные равны нулю.

Обсудим примеры. Покажем, что липшицевыми являются выпуклые ограниченные области (в частности, выпуклые многогранники, конусы и цилиндры в трехмерном случае).

Пусть X — линейное пространство. Как известно, множество в X называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками оно содержит все точки соединяющего их отрезка. Пересечение выпуклых множеств выпукло. Выпуклая оболочка заданных точек в X — наименьшее выпуклое множество, содержащее эти точки.

В ближайшей теореме, временно, будет удобно считать, что функция зависит от n переменных: $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Вещественная функция φ, заданная на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, называется *выпуклой вниз*, если для любых двух точек x и y из U, таких, что соединяющий их отрезок лежит в U, и любого $\theta \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$\varphi(\theta x + (1-\theta)y) \leqslant \theta\varphi(x) + (1-\theta)\varphi(y);$$

выпуклой вверх, если выполнено такое же условие с заменой неравенства на противоположное. Условимся в случае выпуклости вниз опускать слово «вниз».

Теорема 9.1.1. *Выпуклая функция локально удовлетворяет условию Липшица.*

Доказательство ([92, с. 12—17]).

1. Сначала проверим, что выпуклая функция φ локально ограничена сверху.

Если $x \in U$, то найдутся такое $\delta > 0$ и такие точки $x^0, \dots, x^n$, что выпуклая оболочка этих точек лежит в U и шар $B_\delta(x)$ радиуса δ с центром в x лежит в этой выпуклой оболочке. Тогда для $y \in B_\delta(x)$ найдутся такие числа $t_k \in [0, 1]$ $(k = 0, \dots, n)$, что

$$y = \sum t_k x^k \quad \text{и} \quad \sum t_k = 1.$$

В силу выпуклости функции φ имеем

$$\varphi(y) \leqslant \sum t_k \varphi(x^k) \leqslant \max \varphi(x^k) = c.$$

2. Теперь проверим, что функция φ непрерывна.

Пусть $\varphi(x) \leqslant c$ на U и $x_0 \in U$. Не ограничивая общности, примем, что $x_0 = 0$ (начало координат) и $\varphi(0) = 0$.

Пусть шар $B = B_r(0)$ лежит в U, $\varepsilon \in (0, c)$ и $V_\varepsilon = (\varepsilon/c)B$. Это окрестность начала координат. Для проверки непрерывности нашей функции в точке 0 достаточно доказать, что $|\varphi(x)| \leqslant \varepsilon$ на V_ε. Пусть $x \in V_\varepsilon$.

Имеем $(c/\varepsilon)x \in B$ и

$$\varphi(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{c}\varphi\left(\frac{c}{\varepsilon}x\right) + \left(1 - \frac{\varepsilon}{c}\right)\varphi(0) \leqslant \frac{\varepsilon}{c}c = \varepsilon.$$

Далее, $(-c/\varepsilon)x \in B$ и

$$0 = \varphi(0) \leqslant \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{c}}\varphi(x) + \frac{\frac{\varepsilon}{c}}{1+\frac{\varepsilon}{c}}\varphi\Big(-\frac{c}{\varepsilon}x\Big) \leqslant \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{c}}\varphi(x) + \frac{\varepsilon}{1+\frac{\varepsilon}{c}},$$

так что $-\varepsilon \leqslant \varphi(x)$. Таким образом, $|\varphi(x)| \leqslant \varepsilon$.

3. Перейдем к доказательству утверждения теоремы. Пусть $x_0 \in U$, $\varphi(x_0) = 0$. Найдем такие положительные c, r и δ, что $\overline{B_{r+\delta}(x_0)} \subset U$ и

$$|\varphi(y)| \leqslant c \quad \text{при } y \in B_{r+\delta}(x_0).$$

Мы проверим условие Липшица на $B_r(x_0)$.

Пусть $x, y \in B_r(x_0)$, $x \neq y$. Положим

$$z = y + \delta\frac{y-x}{|y-x|}, \quad \theta = \frac{|y-x|}{|y-x|+\delta}.$$

Тогда $z \in B_{r+\delta}(x_0)$ и $y = \theta z + (1-\theta)x$. Используя выпуклость функции φ, получаем

$$\varphi(y) \leqslant \theta\varphi(z) + (1-\theta)\varphi(x).$$

Поэтому

$$\varphi(y) - \varphi(x) \leqslant \theta[\varphi(z) - \varphi(x)] \leqslant \frac{|y-x|}{|y-x|+\delta}2c \leqslant \frac{2c}{\delta}|y-x|.$$

Так как x и y можно поменять местами, то получаем

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant \frac{2c}{\delta}|y-x| \quad \text{при } x, y \in B_r(x_0). \qquad \square$$

Конечно, такое же утверждение верно и для выпуклых вверх функций.

Можно проверить, что ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ выпукла, если ее граница вблизи каждой своей точки является после подходящего поворота системы координат графиком выпуклой вверх функции $x_n = \varphi(x')$ и прилегающая часть области лежит под этим графиком. На этом не будем останавливаться.

Следствие 9.1.2. *Ограниченная выпуклая область липшицева.*

Можно было бы предположить, что липшицевы поверхности инвариантны относительно билипшецевых преобразований их окрестностей (липшицевых преобразований, имеющих липшицевы обратные). Но это не так, пример указан в книге Гривара [76, п. 1.2.1]. Гривар формулирует определение более широкого класса *липшицевых многообразий*, инвариантных относительно таких преобразований. Однако суперпозиция липшицевых функций липшицева, поэтому липшицева поверхность допускает довольно общие преобразования локальных координат.

Пример области в $\mathbb{R}^3$, не являющейся липшицевой [87]: область, которую занимают два кирпича, второй лежит на первом поперек первого. Не является липшицевой также плоская область, граница которой — кривая, имеющая точку возврата.

Напомним, что функция φ, определенная в окрестности точки $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, называется дифференцируемой в этой точке, если

$$\varphi(y') - \varphi(x') = \sum_1^{n-1} \partial_j \varphi(x')(y_j - x_j) + o(|y' - x'|) \quad (y' \to x').$$

Теорема 9.1.3. *Пусть вещественная функция $\varphi(x')$ удовлетворяет условию Липшица в области U пространства $\mathbb{R}^{n-1}$. Тогда она дифференцируема почти всюду в U.*

Доказательство. 1. При $n-1=1$ это следует из хорошо известных теорем (см. [23]). Липшицева функция имеет ограниченное изменение, поэтому является разностью двух монотонных функций, а монотонная функция имеет производную почти всюду, что равносильно дифференцируемости в тех же точках в одномерном случае. Вдобавок модуль производной ограничен липшицевой постоянной.

В многомерном случае область U можно считать шаром. Обозначим через v его меру Лебега (n-мерный объем). Из сказанного следует существование и ограниченность всех первых частных производных на подмножестве $U' \subset U$ полной меры. Каждая из них — предел соответствующего разностного отношения. По теореме Егорова (см., например, [23]), при любом $\delta > 0$ существует подмножество $U'' \subset U'$ меры Лебега не меньше $v - \delta$, на котором сходимость равномерна. Это подмножество можно считать совершенным — замкнутым и не имеющим изолированных точек. На U'' все эти частные производные непрерывны и, значит, равномерно непрерывны. Кроме того, они равномерно ограничены по модулю липшицевой постоянной C.

2. Для простоты проведем сначала доказательство для $n-1=2$. Здесь мы следуем [315]. Обозначим через T подмножество $T \subset U''$ точек плотности множества U''. Напомним, что это означает следующее: если $x \in T$ и $O_r(x)$ — шар радиуса r с центром в точке x, то отношение меры пересечения $T \cap O_r(x)$ к мере этого шара стре-

мится к единице при $r \to 0$. Меры множеств T и U'' одинаковы. Мы докажем дифференцируемость функции $\varphi(x)$ в каждой точке x^0 множества T.

Рассмотрим произвольную точку x^1. Пусть $r = |x^1 - x^0|$. Если точка x^1 принадлежит U'', то все дальнейшее существенно упрощается. Пусть x^1 не принадлежит U''. Тогда идея состоит во временной замене этой точки очень близкой точкой x^2 из U''. Зафиксируем малое число $\varepsilon > 0$.

Поскольку x^0 — точка плотности для U'', при достаточно малом r в пересечении $O_r(x^0) \cap O_{\varepsilon r}(x^1)$ найдется точка $x^2 \in U''$. Тогда

$$|x^1 - x^2| < \varepsilon |x^1 - x^0|. \tag{9.1.2}$$

Нам надо показать, что

$$\begin{aligned}\varphi(x^1) - \varphi(x^0) &= \\ &= (x_1^1 - x_1^0)\partial_1\varphi(x^0) + (x_2^1 - x_2^0)\partial_2\varphi(x^0) + \alpha(x^1)|x^1 - x^0|,\end{aligned} \tag{9.1.3}$$

где $\alpha(x^1) \to 0$ при $r \to 0$. Запишем левую часть в виде

$$\varphi(x^1) - \varphi(x^0) = [\varphi(x^1) - \varphi(x^2)] + [\varphi(x^2) - \varphi(x^0)]. \tag{9.1.4}$$

Здесь первая разность справа оценивается при помощи условия (9.1.1) и неравенства (9.1.2):

$$|\varphi(x^1) - \varphi(x^2)| \leqslant C|x^1 - x^2| < C\varepsilon|x^1 - x^0|. \tag{9.1.5}$$

Вторую разность справа в (9.1.4) перепишем так:

$$\varphi(x^2) - \varphi(x^0) = [\varphi(x_1^2, x_2^2) - \varphi(x_1^0, x_2^2)] + [\varphi(x_1^0, x_2^2) - \varphi(x_1^0, x_2^0)]. \tag{9.1.6}$$

Здесь разность в первых квадратных скобках справа перепишем в виде

$$\begin{aligned}(x_1^2 - x_1^0)\frac{\varphi(x_1^2, x_2^2) - \varphi(x_1^0, x_2^2)}{x_1^2 - x_1^0} &= (x_1^2 - x_1^0)[\partial_1\varphi(x^2) + \beta_1] = \\ &= (x_1^2 - x_1^0)[\partial_1\varphi(x^0) + \beta_1 + \beta_2].\end{aligned} \tag{9.1.7}$$

При $r \to 0$ величина β_1 равномерно стремится к нулю в силу равномерной сходимости разностных отношений к частным производным. Величина β_2 равномерно стремится к нулю в силу равномерной непрерывности частных производных на T. Имеется в виду равномерность не только по выбору точки x^2, которую приходится менять при $x^1 \to x^0$, но и по выбору точки x^0.

Вторую разность в квадратных скобках в формуле (9.1.6) переписываем и преобразуем немного проще:

$$(x_2^2-x_2^0)\frac{\varphi(x_1^0,x_2^2)-\varphi(x_1^0,x_2^0)}{x_2^2-x_2^0}=(x_2^2-x_2^0)[\partial_2\varphi(x^0)+\beta_3]. \tag{9.1.8}$$

Здесь тоже $\beta_3\to 0$ при $r\to 0$ равномерно по выбору точек x^2 и x^0. При достаточно малом r все β_j по модулю меньше ε.

Теперь мы имеем

$$\varphi(x^1)-\varphi(x^0)=(x_1^2-x_1^0)\partial_1\varphi(x^0)+(x_2^2-x_2^0)\partial_2\varphi(x^0)+\gamma_1, \tag{9.1.9}$$

где при достаточно малом $r=|x^1-x^0|$

$$|\gamma_1|\leqslant|x^1-x^0|C_1\varepsilon. \tag{9.1.10}$$

Последний шаг состоит в замене линейных множителей:

$$\varphi(x^1)-\varphi(x^0)=(x_1^1-x_1^0)\partial_1\varphi(x^0)+(x_2^1-x_2^0)\partial_2\varphi(x^0)+\gamma_2, \tag{9.1.11}$$

где

$$|\gamma_2|\leqslant|x^1-x^0|C_2\varepsilon,$$

т. е. в (9.1.3)

$$|\alpha(x^1)|\leqslant C_3\varepsilon, \tag{9.1.12}$$

где постоянная не зависит от x^1.

Этим ввиду произвольности ε дифференцируемость нашей функции в точке x^0 доказана. Отметим, что получена равномерная оценка для α в (9.1.3) по выбору точки x^0, т. е. равномерная оценка отношения разности между приращением функции и ее дифференциалом к расстоянию $|x^1-x^0|$.

3. Далее можно провести индукцию по размерности n. Мы ее только наметим. Пусть $n-1\geqslant 3$ и для $n-2$ вместо $n-1$ утверждение доказано с нужной равномерной оценкой.

Точки x шара U теперь записываем в виде (x_1,X_2), где $X_2=(x_2,\ldots,x_{n-1})$. Во всех точках подмножества $U''\subset U$ (совершенного и меры, сколь угодно близкой к мере множества U) наша функция дифференцируема по X_2 и имеет частную производную по x_1, при этом все частные производные непрерывны и равномерно ограничены на U'' и оценка отношения разности между приращением функции при изменении X_2 и ее дифференциалом по X_2 к расстоянию по X_2 равномерно мала. Снова пусть T — множество точек плотности для U''. Дифференцируемость по совокупности переменных доказывается опять в каждой точке $x^0 \in T$. Если x^1 — другая точка на расстоянии r от нее, то при заданном малом ε мы при достаточно малом r находим точку $x^2 \in U''$ так, что $|x^1 - x^2| \leqslant \varepsilon |x^1 - x^0|$, при этом

$$\varphi(x_1^2, X_2^2) - \varphi(x_1^0, X_2^2) = (x_1^2 - x_1^0)[\partial_1 \varphi(x^0) + \beta]$$

и

$$\varphi(x_1^0, X_2^2) - \varphi(x_1^0, X_2^0) = \sum_2^{n-1} (x_j^2 - x_j^0) \partial_j \varphi(x^0) + \widetilde{\beta} |X_2^2 - X_2^0|,$$

где выполнены равномерные оценки $|\beta| \leqslant \varepsilon$, $|\widetilde{\beta}| \leqslant \varepsilon$ при достаточно малом r. Далее все проходит, как в двумерном случае, причем опять получается нужная равномерная оценка. □

Из доказанной теоремы следует, что липшицева поверхность имеет касательную гиперплоскость и нормаль почти в каждой точке.

Лебегова мера в $\mathbb{R}^n$ индуцирует лебегову меру на Γ. Локально, в тех же локальных координатах, что и в (9.1.1), интеграл Лебега от функции $f(x)$ на Γ по участку $\mathfrak{S}$ с проекцией O на x'-плоскость определяется формулой

$$\int_{\mathfrak{S}} f(x)\, dS = \int_O f(x', \varphi(x')) \sqrt{1 + |\nabla \varphi(x')|^2}\, dx'. \tag{9.1.13}$$

Здесь градиент $\nabla \varphi(x')$ ограничен.

Важное свойство липшицевой поверхности Γ — равномерное свойство конуса, внутреннее и внешнее. Для границы Γ ограниченной липшицевой области Ω его можно сформулировать следующим образом.

Предложение 9.1.4. *Каждая точка $x \in \Gamma$ является вершиной двух замкнутых круговых конусов $\Upsilon_+(x)$ и $\Upsilon_-(x)$ конечной высоты, из которых первый лежит внутри Ω, а второй внутри дополнения к $\overline{\Omega}$, кроме их вершины; при этом все эти конусы конгруэнтны фиксированному круговому конусу Υ и непрерывно зависят от x.*

Последний конус можно задать так:

$$\Upsilon = \{z = (z', z_n) : |z'|/\alpha \leqslant z_n \leqslant h\}, \tag{9.1.14}$$

где h и α — достаточно малые положительные числа.

Будем говорить, что в этом случае мы имеем *регулярное семейство конусов* $\{\Upsilon_\pm(x)\}$, $x \in \Gamma$.

Более того, локально оси этих конусов можно выбирать параллельными.

Справедливо и обратное утверждение: из равномерного условия конуса следует липшицевость границы. (Кроме того, из внутреннего равномерного условия конуса следует внешнее равномерное условие конуса и наоборот.) Доказательство приведено в [76, с. 10—11]. Поясним, что граничная точка x помещается в центр малого цилиндра

$$S = \{y = (y', y_n)\colon |y' - x'| < r,\ |y_n - x_n| < h\}$$

и функция $y_n = \varphi(y')$ определяется при $|y' - x'| < r$ как верхняя грань таких y_n, что $(y', y_n) \in S \cap \Omega$. Проверяется, что она удовлетворяет условию Липшица.

Еще одно важное свойство липшицевой границы — возможность аппроксимировать ее бесконечно гладкой поверхностью изнутри и снаружи. Более точно, справедливо следующее утверждение. Оно доказано в [154] и [99].

Предложение 9.1.5. *Пусть Ω^+ — ограниченная липшицева область и Ω^- дополнение к ее замыканию, Γ — их общая граница, $\{\Upsilon_\pm(y)\}$, $y \in \Gamma$, — регулярное семейство конусов для Γ.*

Тогда существуют последовательность областей Ω_j^+ с бесконечно гладкими границами Γ_j и замыканиями, лежащими внутри Ω^+, и липшицевы диффеоморфизмы $\Lambda_j\colon \Gamma \to \Gamma_j$, со следующими свойствами.

1. *$\Lambda_j(y)$ равномерно стремится к $y \in \Gamma$ при $j \to \infty$, оставаясь в конусе $\Upsilon_+(y)$.*

2. *Якобианы отображений Λ_j стремятся к 1 поточечно почти всюду и в любом $L_p(\Gamma)$, $1 \leqslant p < \infty$.*

3. *Единичные векторы $\nu(\Lambda_j(y))$ внешних нормалей к Γ_j сходятся к единичному вектору $\nu(y)$ внешней нормали к Γ для почти всех $y \in \Gamma$ и в любом $L_p(\Gamma)$, $1 \leqslant p < \infty$.*

4. *Существует бесконечно гладкое векторное поле $h(x)$ в $\mathbb{R}^n$, такое, что на Γ_j скалярное произведение $(h(\Lambda_j(y)), \nu(\Lambda_j(y))$ не меньше некоторой положительной постоянной, зависящей только от липшицевой постоянной для Γ.*

Существует также аналогичное семейство областей Ω_j^- с замыканиями, лежащими внутри Ω^-.

Часто пишут $\Omega_j^+ \uparrow \Omega$ и $\Omega_j^- \downarrow \Omega$.

Доказательство сводится к локальному рассмотрению границы Г в локальных координатах. Соответствующая функция φ (см. (9.1.1)) сглаживается — заменяется ее сверткой с функцией из дельтаобразного семейства финитных бесконечно гладких функций, и график этой свертки сдвигается в нужную сторону. Мы не будем проводить доказательство подробно, но в п. 9.3 читатель найдет наиболее важные детали в случае $p=2$.

Пространство $C^t(\overline{\Omega})$, где Ω — ограниченная липшицева область и $t>0$, удобно определить как состоящее из сужений на $\overline{\Omega}$ функций из $C_b^t(\mathbb{R}^n)$ с обычной inf-нормой.

Нам понадобятся еще *специальные липшицевы области*. Так называется неограниченная область над графиком или под графиком функции $x_n=\varphi(x')$, заданной на $\mathbb{R}^{n-1}$ и удовлетворяющей равномерному условию Липшица (т. е. условию Липшица с фиксированной постоянной).

9.2. Пространства H^s в липшицевых областях и на липшицевых поверхностях. Пусть Ω — ограниченная липшицева область с липшицевой границей Γ.

Определения пространств $H^s(\Omega)$, данные в § 5, сохраняются при любом s. То же верно в отношении пространств $\widetilde{H}^s(\Omega)$ и $\mathring{H}^s(\Omega)$. Но пространства $H^s(\Gamma)$ инвариантно определяются (при помощи разбиения единицы и норм в $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$), в общем случае только при $|s|\leqslant 1$ из-за того, что липшицева поверхность локально есть график липшицевой функции.

Теорема о следе справедлива в следующей формулировке.

Теорема 9.2.1. *Оператор перехода к следу на границе* Γ *ограниченной липшицевой области* Ω *действует ограниченным образом из* $H^s(\Omega)$ *в* $H^{s-1/2}(\Gamma)$ *при* $1/2<s<3/2$.

Как мы сейчас увидим, при $1/2<s\leqslant 1$ это утверждение получается почти так же, как в случае гладкой границы. Для $1<s<3/2$ результат принадлежит Костабелю [217].

Доказательство теоремы 9.2.1. Достаточно рассмотреть специальную липшицеву область под графиком функции $x_n=\varphi(x')$, удовлетворяющей равномерному условию Липшица. В этом случае x' — локальные координаты на Γ. Будем считать, что функция $u(x)$ продолжена до функции из $H^s(\mathbb{R}^n)$. (Оператор продолжения строится в следующем параграфе.) Там плотны функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Поэтому пусть $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Положим

$$u_1(x) = u(x', \varphi(x') + x_n). \tag{9.2.1}$$

Тогда граничное значение $\gamma^+ u$ — это $u_1(x', 0)$, и

$$\|\gamma^+ u\|_{H^{s-1/2}(\Gamma)} = \|u_1(x', 0)\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{9.2.2}$$

Задача. Проверьте, что

$$\|u_1(x)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 \|u(x)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \quad \text{при } 0 < s \leqslant 1. \tag{9.2.3}$$

В силу общей теоремы 1.10.1 о следе

$$\|u_1(x', 0)\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C_2 \|u_1(x)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \quad \text{при } 1/2 < s \leqslant 1,$$

поэтому при $1/2 < s \leqslant 1$ нет проблем. Будем теперь предполагать, что $1 < s < 3/2$.

Следуя Костабелю, введем анизотропное пространство $E^s = E^s(\mathbb{R}^n)$ с нормой, определяемой равенством

$$\|u\|_{E^s}^2 = \int a_s(\xi) |Fu(\xi)|^2 \, d\xi, \tag{9.2.4}$$

где

$$a_s(\xi) = |\xi_n|^{2s-2}(1 + |\xi|^2). \tag{9.2.5}$$

Утверждается, что

$$\|u_1\|_{E^s} \leqslant C_2 \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \quad \text{и} \quad \|u_1(x', 0)\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C_3 \|u_1\|_{E^s}. \tag{9.2.6}$$

Отсюда следует нужный результат. Первое из неравенств (9.2.6) очевидно; проверим второе. Заметим, что

$$\int a_s^{-1}(\xi) \, d\xi_n = C_s (1 + |\xi'|^2)^{-(s-1/2)}, \quad \text{где } C_s = \int \frac{dt}{t^{2s-2}(1+t^2)} \tag{9.2.7}$$

— сходящийся интеграл при $1 < s < 3/2$. Имеем

$$\|u_1(x', 0)\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}^2 = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\xi'|^2)^{s-1/2} \left| \int (Fu_1)(\xi', \xi_n) \, d\xi_n \right|^2 d\xi'.$$

Применяя неравенство Шварца, получаем, что правая часть не превосходит

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\xi'|^2)^{s-1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} a_s^{-1}(\xi) \, d\xi_n \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} a_s(\xi) |(Fu_1)(\xi)|^2 \, d\xi_n \right) d\xi',$$

а это выражение равно $C_s \|u_1\|_{E^s}^2$. Мы получили второе неравенство в (9.2.6), что и требовалось. $\square$

При $s=3/2$ такая теорема уже теряет силу, см. пример в [249]. Из-за этого ограничения пространства $H^s(\Omega)$ с большими $|s|$ при рассмотрении граничных задач уже не очень удобны.

Построение правого обратного оператора из $H^{s-1/2}(\Gamma)$ в $H^s(\Omega)$ к оператору перехода к следу для $s\in(1/2,1]$ не вызывает проблем. Для $s\in(1,3/2)$ его можно найти в книге [80].

Пространства $H^s(\Omega)$ и $\widetilde{H}^{-s}(\Omega)$ остаются дуальными относительно продолжения скалярного произведения в $L_2(\Omega)$ на их прямое произведение. Пространства $H^s(\Omega)$ и $\widetilde{H}^s(\Omega)$ можно отождествить при $|s|<1/2$, нормы эквивалентны. Пространства $\widetilde{H}^s(\Omega)$ и $\mathring{H}^s(\Omega)$ отождествляются, в частности, при $0<s<3/2$, $s\neq 1/2$ (ср. с [76]), нормы эквивалентны.

Заметим, что при $s>1/2$ мы можем организовать строгое вложение

$$\widetilde{H}^{-s}(\Omega)\supset H^{-s}(\Omega), \tag{9.2.8}$$

как в (5.1.14), договорившись, например, что функционалы справа продолжаются нулем на ортогональное дополнение к $\widetilde{H}^s(\Omega)$ в $H^s(\Omega)$. Левое пространство, кроме правого, содержит еще функционалы над $H^s(\Omega)$, сосредоточенные на границе. При $s\in(1/2,3/2)$ они имеют вид

$$(h,v^+)_\Gamma, \tag{9.2.9}$$

где $h\in H^{-s+1/2}(\Gamma)$. Это видно из (5.1.15). Ср. с [271].

В отношении мультипликаторов остаются в силе теорема 5.1.6 и замечание после нее.

Теорема о вложении пространства $H^s(\Gamma)$ в пространство $C(\overline{\Gamma})$ непрерывных функций при $s>1/2$ верна на границе двумерной липшицевой области.

Пространства $H^s(\Gamma)$ и $H^{-s}(\Gamma)$, $|s|\leqslant 1$, дуальны относительно продолжения скалярного произведения в $L_2(\Gamma)$ на их прямое произведение.

Пусть липшицева поверхность Γ разделена на две липшицевы области Γ_1 и Γ_2 их общей тоже липшицевой границей $\partial\Gamma_j$ (размерности $n-2$); точнее, $\Gamma=\Gamma_1\cup\partial\Gamma_j\cup\Gamma_2$. Тогда можно рассматривать пространства $H^s(\Gamma_1)$, $\widetilde{H}^s(\Gamma_1)$, $\mathring{H}^s(\Gamma_1)$ и такие же пространства в Γ_2 при $|s|\leqslant 1$. Пространство $\widetilde{H}^s(\Gamma_1)$ является подпространством в $H^s(\Gamma)$. Имеется оператор продолжения функций из Γ_1 на Γ, действующий ограниченным образом из $H^s(\Gamma_1)$ в $H^s(\Gamma)$ при $|s|\leqslant 1$.

Пространства $H^s(\Gamma_1)$ и $\widetilde{H}^{-s}(\Gamma_1)$ являются дуальными относительно продолжения скалярного произведения в $L_2(\Gamma_1)$ на их прямое произведение. Пространства $H^s(\Gamma_1)$ и $\widetilde{H}^s(\Gamma_1)$ можно отождествить при $|s|<1/2$. Пространства $\widetilde{H}^s(\Gamma_1)$ и $\mathring{H}^s(\Gamma_1)$ отождествляются при $0<s\leqslant 1$, $s\neq 1/2$.

9.3. Интегрирование по частям. Этот вопрос удобно рассмотреть в отдельном пункте. Основная цель состоит в выводе предложения 9.3.3. Сначала мы должны проверить несколько утверждений, в которых полезно иметь уверенность при рассмотрении липшицевых функций.

1. Пусть $\varphi(x)$ — липшицева функция в ограниченной области $G\subset\mathbb{R}^n$. Тогда она липшицева по каждому переменному x_j при фиксированных остальных, поэтому абсолютно непрерывна по x_j и имеет производную по x_j почти всюду. При этом справедлива формула Ньютона—Лейбница (см., например, [23, гл. 6, § 4]). Например, если для простоты обозначений $j=n$, то

$$\varphi(x',b)-\varphi(x',a)=\int_a^b \partial_n\varphi(x',t)\,dt.$$

Поэтому *если функция* $\varphi(x)$ *финитна* (равна 0 вблизи границы ∂G), *то*

$$\int_G \partial_j\varphi(x)\,dx=0 \tag{9.3.1}$$

при всех j.

2. Обозначим через $\Delta_n\varphi(x)$ приращение функции $\varphi(x)$ (пока любой) по переменному x_n:

$$\Delta_n\varphi(x)=\varphi(x',x_n+h)-\varphi(x',x_n).$$

Здесь h фиксировано и не указано в обозначении. Пусть φ_1 и φ_2 — две функции. Тогда

$$\Delta_n[\varphi_1(x)\varphi_2(x)]=\Delta_n\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x',x_n+h)+\varphi_1(x)\Delta_n\varphi_2(x).$$

Пусть теперь φ_1 и φ_2 — липшицевы функции. Их произведение, конечно, тоже липшицева функция. Переходя в последнем равенстве, поделенном на h, к пределу, получаем равенство

$$\partial_n[\varphi_1(x)\varphi_2(x)] = \partial_n\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x) + \varphi_1(x)\partial_n\varphi_2(x) \tag{9.3.2}$$

на множестве полной меры. Аналогичное равенство верно, конечно, для ∂_j при любом j.

Предложение 9.3.1. *Пусть одна из двух липшицевых функций φ_1, φ_2 финитна. Тогда справедлива формула интегрирования по частям*

$$\int\limits_G \partial_j\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)\,dx = -\int\limits_G \varphi_1(x)\partial_j\varphi_2(x)\,dx. \tag{9.3.3}$$

Действительно, интегрируя (9.3.2) и используя равенство (9.3.1), получаем (9.3.3).

3. Считая липшицеву функцию $\varphi(x)$ для простоты финитной, рассмотрим ее свертку со сглаживающей функцией $\omega_h(x)$ из п. 1.11 при достаточно малом h:

$$(\varphi*\omega_h)(x) = \int\limits_G \varphi(y)\omega_h(x-y)\,dy. \tag{9.3.4}$$

Предложение 9.3.2. 1. *Свертка* (9.3.4) *бесконечно дифференцируема и равномерно сходится к функции φ при $h\to 0$.*

2. *Справедливо равенство*

$$\partial_j(\varphi*\omega_h) = (\partial_j\varphi)*\omega_h, \tag{9.3.5}$$

и эта производная сходится к $\partial_j\varphi$ в $L_2(\Omega)$ при $h\to 0$.

3. *По некоторой стремящейся к* 0 *последовательности значений h_k имеет место сходимость производной* (9.3.5) *к $\partial_j\varphi$ почти всюду.*

Доказательство. Свертку (9.3.4) можно любое число раз дифференцировать под знаком интеграла, ее бесконечная дифференцируемость не вызывает сомнений.

Так как $\int\limits_G \omega_h(y)dy = 1$, то

$$(\varphi*\omega_h)(x) - \varphi(x) = \int\limits_G [\varphi(y)-\varphi(x)]\omega_h(x-y)\,dy.$$

Здесь функция $\omega_h(x-y)$ отлична от нуля только при малых $|x-y|$, и равномерная сходимость левой части к нулю следует из равномерной непрерывности функции φ.

Далее,

$$\partial_j(\varphi * \omega_h)(x) = -\int\limits_G \varphi(y)\partial_j\omega_h(x-y)\,dy$$

(справа производная по y), так что в силу (9.3.3) получается формула

$$\partial_j(\varphi * \omega_h)(x) = \int\limits_G [\partial_j\varphi(y)]\omega_h(x-y)\,dy,$$

т. е. формула (9.3.5).

Ограниченная функция $\partial_j\varphi$ принадлежит $L_2(G)$, поэтому, как и в п. 1.11, получаем, что эта свертка сходится к $\partial_j\varphi$ в $L_2(G)$.

Из этой сходимости следует сходимость по мере: мера множества, на котором модуль разности $\partial_j(\varphi * \omega_h)(x) - \partial_j\varphi(x)$ больше любого фиксированного положительного числа, стремится к нулю. Известно, что сходящаяся по мере к нулю последовательность функций содержит подпоследовательность, сходящуюся к нулю почти всюду (см., например, [23, гл. V, § 4]). Отсюда следует последнее утверждение предложения. □

Соотношение вида (9.3.5) в других ситуациях хорошо известно, см., например, [2]. Утверждение 3 ниже останется «безработным», но в близком контексте оно упоминалось в предложении 9.1.5.

Сдвигая графики сверток вниз, можно предположить, что они аппроксимируют график функции φ снизу.

4. Пусть Ω — ограниченная область с липшицевой границей Γ и ν — единичная внешняя нормаль к границе (существующая почти всюду).

Предложение 9.3.3. *Пусть $u, v \in H^1(\Omega)$. Тогда*

$$(\partial_j u, v)_\Omega + (u, \partial_j v)_\Omega = (\nu_j u^+, v^+)_\Gamma. \tag{9.3.6}$$

Доказательство мы проведем частично. Достаточно получить эту формулу для гладких функций u, v с носителями, примыкающими к малому участку границы. Но мы ограничимся рассмотрением следующей ситуации. Пусть этот участок лежит над малым шаром U в координатной гиперплоскости $x_n = 0$ и является графиком положительной липшицевой функции $x_n = \varphi(x')$, а носители функций u, v тоже лежат над этим шаром под графиком, и пусть $j = 1, \ldots, n-1$.

Аппроксимируем функцию φ снизу бесконечно гладкими функциями, как описано выше, тоже определенными в U. Обозначим их через φ_m. Если $\theta_m(x)$ — характеристическая функция части области Ω над тем же шаром под графиком Γ функции φ_m, то мы имеем

$$(\theta_m \partial_j u, v)_\Omega + (\theta_m u, \partial_j v)_\Omega = (\nu_{m,j} u^+, v^+)_\Gamma, \tag{9.3.7}$$

где ν_m — внешняя нормаль в точках этого графика. Очевидно, что при $m \to \infty$ левая часть в (9.3.7) сходится к левой части в (9.3.6). Остается проверить, что то же верно для правой части. Подробно она переписывается в виде

$$\int_U [\partial_j \varphi_m(x')] u(x', \varphi_m(x')) \overline{v(x', \varphi_m(x'))}\, dx'$$

после сокращения на квадратный корень из $1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\partial_k \varphi_m)^2$, который сначала пишется под $\partial_j \varphi_m(x')$ и перед dx'. Так как $\varphi_m \to \varphi$ равномерно, а $\partial_j \varphi_m \to \partial_j \varphi$ в $L_2(U)$, то нужный результат легко получается. $\square$

Более полное доказательство формулы (9.3.6) для функций из более общих соболевских L_p-пространств W_p^1 (см. §14) можно найти в книге [91].

§10. Дискретные нормы, дискретное представление функций и универсальный оператор продолжения

В этом параграфе преследуются три цели. Во-первых, это построение «дискретных представлений» функций из $H^s(\mathbb{R}^n)$ и соответствующих «дискретных норм», существенно более общих, чем в п. 1.14. Во-вторых, построение аналогичных представлений и норм в специальных липшицевых областях Ω. В-третьих, построение на этой основе универсального ограниченного оператора продолжения функций из $H^s(\Omega)$ до функций из $H^s(\mathbb{R}^n)$, который действует при всех s. Именно для последней цели обобщаются построения п. 1.14. Универсальный оператор продолжения удобен, в частности, при использовании теорем теории интерполяции.

Прежние нормы удобнее при исследовании уравнений в частных производных. Это видно из обширной литературы. Но с ними решаются не все проблемы теории пространств H^s. В частности, у нас пока нет единого оператора продолжения, который действовал бы и при отрицательных s, и нет при отрицательных s нормы в $H^s(\Omega)$, определяемой явным образом по функциям или обобщенным функциям в этой области, подобно (5.1.2) и (5.1.3). Они будут определены в этом параграфе.

Весь параграф — это упрощенный вариант работы [294], в которой рассматриваются намного более общие пространства. Но его чтение вряд ли покажется легким.

10.1. Дискретные нормы в $H^s(\mathbb{R}^n_x)$. Начнем с существенного обобщения построения разбиения единицы, проведенного в п. 1.14. Это обобщение вскоре понадобится.

Пусть функция $\psi_0(\xi)$ принадлежит пространству Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi)$ и положительна в точке $\xi=0$, причем

$$|\psi_0(\xi)-\psi_0(0)| \leqslant C_N|\xi|^N \quad (|\xi| \leqslant 1) \tag{10.1.1}$$

с некоторым целым $N \geqslant 1$ и постоянной C_N, не зависящей от ξ. Это условие эквивалентно тому, что производные от ψ_0 в точке 0 ненулевого порядка, меньшего N, равны нулю. При $N=1$ здесь, конечно, ничего дополнительно не предполагается. Но в конечном счете нам понадобится $N=\infty$.

Положим

$$\psi(\xi) = \psi_0(\xi)-\psi_0(2\xi) \tag{10.1.2}$$

и

$$\psi_j(\xi) = \psi(\xi/2^j) \quad (j = 1, 2, \ldots), \tag{10.1.3}$$

так что

$$\psi_j(\xi) = \psi_0(\xi/2^j)-\psi_0(\xi/2^{j-1}) \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{10.1.4}$$

Обратные преобразования Фурье от функций $\psi_0(\xi)$, $\psi(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ обозначим соответственно через $\varphi_0(x)$, $\varphi(x)$ и $\varphi_j(x)$. Условия $\psi_0(0)\neq 0$ и (10.1.1) равносильны тому, что для моментов функции φ_0 мы имеем

$$\int \varphi_0(x)\,dx \neq 0 \quad \text{и} \quad \int x^\alpha \varphi_0(x)\,dx = 0 \quad \text{при } 0<|\alpha|<N \tag{10.1.5}$$

(если $N>1$).

С учетом того, что функция $\psi_0(\xi)$ принадлежит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет условию (10.1.1), справедливы неравенства

$$|\psi(\xi)| \leqslant C_{N,M}|\xi|^N(1+|\xi|)^{-M} \tag{10.1.6}$$

со сколь угодно большим M и постоянной, не зависящей от ξ. Здесь $|\xi|^N$ можно заменять единицей при $|\xi|\geqslant 1$. Отсюда видно, в частности, что при $j\geqslant 1$ (и $M=0$)

$$2^{2js}|\psi_j(\xi)|^2 \leqslant C^2_{N,0}|\xi|^{2N}2^{2j(s-N)}. \tag{10.1.7}$$

Заметим, что

$$\sum_0^m \psi_j(\xi) = \psi_0(\xi/2^m) \to \psi_0(0) \quad (m \to \infty), \tag{10.1.8}$$

поэтому

$$\sum_0^\infty \psi_j(\xi) = \psi_0(0) \tag{10.1.9}$$

в каждой точке ξ, причем сходимость равномерна в любой ограниченной области.

Норма функции $u(x)$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$ при любом $s \in \mathbb{R}$ определена у нас формулой

$$\|u(x)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}(Fu)(\xi)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \tag{10.1.10}$$

где F — преобразование Фурье. Определим новую норму в $H^s(\mathbb{R}^n)$ формулой

$$\|u(x)\|_{H^s(\mathbb{R}^n),\varphi_0} = \left(\sum_0^\infty 2^{2js}\|\psi_j(\xi)(Fu)(\xi)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/2}. \tag{10.1.11}$$

Эту норму можно переписать в виде

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n),\varphi_0} = \left[\sum_0^\infty 2^{2js}\|(\varphi_j * u)(x)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right]^{1/2}. \tag{10.1.12}$$

Теорема 10.1.1. *При любой функции $\varphi_0 \in \mathcal{S}$, удовлетворяющей условиям* (10.1.5), *и любом $s<N$ формула* (10.1.12) *определяет норму в $H^s(\mathbb{R}^n)$, эквивалентную обычной норме* (10.1.10).

Это обобщение предложения 1.14.2. Доказательство сводится к проверке следующего утверждения.

Предложение 10.1.2. *При заданном $s<N$ справедлива двусторонняя оценка*

$$C_1 \leqslant \sum_0^\infty \frac{2^{2js}|\psi_j(\xi)|^2}{(1+|\xi|^2)^s} \leqslant C_2 \tag{10.1.13}$$

с положительными постоянными C_1, C_2, не зависящими от ξ.

Поясним, что в силу (10.1.7) ряд в (10.1.13) сходится в любой точке ξ; более того, он сходится равномерно при ограниченных ξ.

Доказательство предложения 10.1.2. Числа s и N фиксируем. Обозначим сумму ряда в (10.1.13) через $\Sigma(\xi)$. Выведем для нее равномерную оценку сверху.

Пусть сначала s положительно. Рассмотрим ξ с $2^k \leqslant |\xi| \leqslant 2^{k+1}$ при некотором целом неотрицательном k. Сумма членов ряда с номерами $j \geqslant k$ не превосходит

$$\sum_{j=k}^{\infty} 2^{2(j-k)(s-N)}$$

с точностью до постоянного множителя, т. е. суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $2^{2(s-N)}$, умноженной на постоянную.

Оценим сумму остальных членов, кроме нулевого. С учетом равномерной ограниченности всех $|\psi_j(\xi)|$ получаем, что эта сумма не превосходит

$$\sum_{j=1}^{k-1} 2^{2(j-k)s}$$

с точностью до постоянного множителя и, значит, не превосходит суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем 2^{-2s}, умноженной на постоянную.

Разумеется, и нулевой член ряда равномерно ограничен. В итоге функция $\Sigma(\xi)$ ограничена сверху положительной постоянной равномерно по ξ при $|\xi| \geqslant 1$. При $|\xi| \leqslant 1$ такой же результат получается при помощи неравенства (10.1.7).

Пусть теперь $s < 0$. Тогда надо оценивать

$$\sum 2^{-2j|s|} |\psi_j(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^{|s|}.$$

Пусть снова $2^k \leqslant |\xi| \leqslant 2^{k+1}$. В сумме по $j \geqslant k$ опять оцениваем $|\psi_j(\xi)|$ постоянной и получаем, что эта сумма не превосходит

$$\sum_{j \geqslant k} 2^{2(k-j)|s|}$$

с точностью до постоянного множителя и, значит, суммы геометрической прогрессии со знаменателем $2^{-2|s|}$. Сумма остальных членов, кроме нулевого, с точностью до постоянного множителя не превосходит (в силу оценки для $\psi_j(\xi)$, вытекающей из (10.1.6))

$$\sum_{j<k} 2^{2(k-j)|s|} 2^{2(j-k)M}.$$

Выбираем $M > |s|$. Получаем, что последняя сумма оценивается суммой геометрической прогрессии

$$\sum_{0}^{\infty} 2^{-2l(M-|s|)}.$$

Нулевой член тоже равномерно ограничен. При $|\xi| \leqslant 1$ снова нет проблем: см. неравенство (10.1.7).

Наконец, если $s = 0$, то при $j \geqslant k$ действуем как в случае положительного s, а при $j < k$ — как в случае отрицательного s: в первом случае пользуемся тем, что $N > 0$, во втором берем $M > 0$.

Теперь оценим сумму $\Sigma(\xi)$ снизу. Ввиду (10.1.9) она положительна в каждой точке ξ, а с учетом равномерной сходимости ограничена снизу положительной постоянной в любой ограниченной области. Найдем такое $r > 0$, что при $|\xi| \geqslant r$ мы имеем $|\psi_0(\xi)| \leqslant \psi_0(0)/2$. Сумму остальных членов в $\Sigma(\xi)$ (т. е. всех, кроме нулевого) обозначим через $\Sigma_1(\xi)$. При $r \leqslant |\xi| \leqslant 2r$ она равномерно ограничена снизу. Пусть $s \geqslant 0$. Тогда $\Sigma_1(2\xi) \geqslant \Sigma_1(\xi)$. Это видно из того, что $\psi_{j+1}(2\xi) = \psi_j(\xi)$ и

$$\frac{2^{2(j+1)s}|\psi_{j+1}(2\xi)|^2}{(1+|2\xi|^2)^s} \geqslant \frac{2^{2js}|\psi_j(\xi)|^2}{(1+|\xi|^2)^s}.$$

Отсюда следует, что при $2r \leqslant |\xi| \leqslant 4r$, $4r \leqslant |\xi| \leqslant 8r$ и т. д. функция $\Sigma_1(\xi)$ ограничена снизу той же постоянной, что и при $r \leqslant |\xi| \leqslant 2r$.

Теперь пусть $s < 0$. Тогда переписываем $\Sigma_1(\xi)$ в виде

$$\frac{(1+|\xi|^2)^{|s|}}{|\xi|^{2|s|}}\Sigma_2(\xi), \quad \text{где } \Sigma_2(\xi) = \sum_1^\infty \left(\frac{|\xi|}{2^j}\right)^{2|s|} \left|\psi\left(\frac{\xi}{2^j}\right)\right|^2.$$

Здесь ограниченность $\Sigma_2(\xi)$ снизу проверяется как в предыдущем случае, а дробь перед этой суммой очевидным образом ограничена снизу. □

10.2. Дискретное представление функций в $\mathbb{R}^n$. Будем теперь считать, что $\psi_0(0) = 1$, так что *ряд* (10.1.9) *сходится к* 1 *в каждой точке, равномерно в любой ограниченной области*. Для функции $\varphi_0(x)$ мы теперь имеем

$$\int \varphi_0(x)\,dx = 1, \quad \int x^\alpha \varphi_0(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad 0 < |\alpha| < N \tag{10.2.1}$$

(если $N > 1$).

Теорема 10.2.1. *В* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\sum_{j=0}^\infty \varphi_j(x) = \delta(x). \tag{10.2.2}$$

Поэтому для $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$u = \sum_0^\infty \varphi_j * u \tag{10.2.3}$$

в смысле сходимости в этом пространстве.

При любом $s < N$ *для любого элемента* $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *справедлива та же формула* (10.2.3) *в смысле сходимости в этом пространстве.*

Доказательство. Проверим сначала последнее утверждение. Пусть $v(\xi) = (Fu)(\xi)$. Рассмотрим разность левой части в (10.2.3) и частной суммы порядка m в правой части. Квадрат нормы этой разности в $H^s(\mathbb{R}^n)$ равен

$$\int (1+|\xi|^2)^s |v(\xi)|^2 \cdot |1-\psi_0(\xi/2^m)|^2 \, d\xi. \tag{10.2.4}$$

Этот интеграл разобьем в сумму интегралов по шару большого радиуса R с центром в начале координат и по дополнению к этому шару. Второй интеграл равномерно по m мал при больших R, так как последний множитель под знаком интеграла в (10.2.4) равномерно ограничен. Первый интеграл, если зафиксировать R, стремится к 0 при $m \to \infty$, так как тот же множитель равномерно стремится к нулю. Этим второе утверждение теоремы доказано.

Чтобы доказать формулу (10.2.2), проверим равенство

$$\sum_{j=0}^\infty \psi_j(\xi) = 1 \tag{10.2.5}$$

в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\xi)$. Для этого подействуем обеими частями последнего равенства на основную функцию $\chi(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi)$. Достаточно убедиться в том, что

$$\int |\chi(\xi)||\psi_0(\xi/2^m) - 1| \, d\xi \to 0$$

при $m \to \infty$. Это проверяется так же, как в первой части доказательства, разбиением интеграла на два — по шару большого радиуса и по его дополнению. □

10.3. Дискретное представление функций и нормы в специальной липшицевой области. *Специальной липшицевой областью* сейчас будем называть неограниченную область *над* графиком функции $x_n = \varphi(x')$, заданной на $\mathbb{R}^{n-1}$ и удовлетворяющей равномерному условию Липшица. Пусть Ω — такая область. Пусть K — выпуклый конус с вершиной в начале и вертикальной осью, такой, что $x+K\subset\Omega$ для любого $x\in\Omega$. Всюду дальше мы *будем предполагать, что функция* $\varphi_0(x)$ *принадлежит* $\mathcal{S}$ *и ее носитель лежит в конусе* $-K=\{x:-x\in K\}$. Тогда это верно и для всех $\varphi_j(x)$.

Будем также предполагать, что выполнены условия (10.2.1) при некотором натуральном N.

Для нас теперь неудобны функции $\varphi_j(x)$ с финитными преобразованиями Фурье $\psi_j(x)$, о которых мы говорили в п. 1.14. В п. 10.5 мы специально обсудим совместимость нового предположения о φ_0 с условиями (10.2.1).

Заметим, что при этом предположении, если $u(x)$ — сужение на Ω непрерывной функции на $\mathbb{R}^n$ (не более чем) умеренного роста, то свертка

$$(\varphi_j*u)(x)=\int_\Omega \varphi_j(x-y)u(y)\,dy$$

определена при $x\in\Omega$, так как если в этом случае $x-y=z\in -K$, то $y=x-z\in\Omega$.

Напомним, что все пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ содержатся в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Элементы v последнего являются производными $\partial^\alpha w(x)$ в смысле обобщенных функций от непрерывных функций на $\mathbb{R}^n$ умеренного роста (см., например, [2, § 4]). Если $\varphi(x)$ — функция из $S(\mathbb{R}^n)$, то свертку $\varphi*v$ можно записать в виде

$$(\varphi*v)(x)=\int \partial^\alpha\varphi(x-y)w(y)\,dy,$$

перебросив производные на φ. Очевидно, что она является гладкой функцией умеренного роста, у которой все производные — тоже функции умеренного роста.

Обозначим через $\mathcal{S}(\Omega)$ линеал в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, состоящий из функций с носителями в Ω, и через $\mathcal{S}'(\Omega)$ пространство сужений на $\mathcal{S}(\Omega)$ обобщенных функций из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Будем такое сужение обобщенной функции из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ называть ее сужением на Ω.

Если $v\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ имеет указанный выше вид $\partial^\alpha w(x)$, то, рассматривая такое сужение, можно $w(x)$ заменить нулем вне Ω.

Пусть теперь $\varphi=\varphi_j$. Тогда сужение $\varphi_j*v|_\Omega$ свертки φ_j*v на Ω полностью определяется сужением $v|_\Omega$. Действительно, если Ω' — дополнение к Ω, то

$$\int_{\Omega'}\partial^\alpha\varphi_j(x-y)w(y)\,dy=0\quad \text{в}\ \ \Omega,$$

так как носитель этой свертки содержится в арифметической сумме множеств Ω' и $-K$ и, значит, лежит в Ω'.

В силу сказанного для $v \in \mathcal{S}'(\Omega)$ однозначно определена свертка $\varphi_j * v$ в Ω, не зависящая от продолжения v до обобщенной функции из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Она является гладкой в Ω вплоть до границы функцией умеренного роста на бесконечности, как и все ее производные.

Пространство $H^s(\Omega)$ определяется как состоящее из сужений на Ω (в смысле обобщенных функций) элементов из $H^s(\mathbb{R}^n)$ с inf-нормой; в частности, можно определять эту норму формулой

$$\|u\|_{H^s(\Omega),\varphi_0} = \inf \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n),\varphi_0}, \tag{10.3.1}$$

где нижняя грань берется по всем $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ с $v|_\Omega = u$.

Теорема 10.3.1. 1. *Для обобщенных функций u из $\mathcal{S}'(\Omega)$ справедлива формула*

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j * u. \tag{10.3.2}$$

2. *При $s < N$ справедливо неравенство*

$$\|u\|'_{H^s(\Omega),\varphi_0} \leqslant C_s \|u\|_{H^s(\Omega)}, \tag{10.3.3}$$

где

$$\|u\|'_{H^s(\Omega),\varphi_0} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{2js} \|\varphi_j * u\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2}. \tag{10.3.4}$$

Доказательство. Первое утверждение следует из (10.2.3).

Проверим второе утверждение. Пусть $u = v|_\Omega$, где $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\varphi_j * u = (\varphi_j * v)|_\Omega,$$

поэтому

$$\|\varphi_j * u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\varphi_j * v\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$

и

$$\|u\|'_{H^s(\Omega),\varphi_0} \leqslant \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n),\varphi_0}.$$

Переходя справа к нижней грани по продолжениям v, получаем с учетом теоремы 10.1.1 неравенство (10.3.3). $\square$

В следующем пункте будет показано, что $\|u\|'_{H^s(\Omega),\varphi_0}$ — норма в $H^s(\Omega)$, эквивалентная обычной.

Если w — функция на Ω, то через $(w)_\Omega$ обозначим ее продолжение на $\mathbb{R}^n$ нулем вне Ω.

Для построения оператора продолжения понадобятся представления функций и обобщенных функций в Ω в немного более сложном, чем (10.3.2), виде

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j * \varphi_j * u \quad (u \in \mathcal{S}'(\Omega)) \tag{10.3.5}$$

с $\Phi_j * \varphi_j$ вместо φ_j. Забегая вперед, отметим, что оператор продолжения функций из Ω в $\mathbb{R}^n$ будет построен в виде

$$\mathcal{E}u = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j * (\varphi_j * u)_\Omega. \tag{10.3.6}$$

Здесь в образах Фурье ($\Psi_j = F\Phi_j$)

$$\Psi_j(\xi) = \Psi(\xi/2^j) \quad (j = 1, 2, \ldots) \tag{10.3.7}$$

с некоторой функцией $\Psi(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, но вместо равенства $\Psi(\xi) = \Psi_0(\xi) - \Psi_0(2\xi)$ мы ниже будем иметь (10.3.16).

В [294] предложена следующая конструкция. Положим, используя функцию $\psi_0(\xi)$ из п. 10.1 с $\psi_0(0) = 1$,

$$\begin{gathered} g_0(\xi) = \psi_0^2(\xi), \quad g(\xi) = g_0(\xi) - g_0(2\xi), \\ g_j(\xi) = g(\xi/2^j) \quad (j = 1, 2, \ldots). \end{gathered} \tag{10.3.8}$$

Тогда

$$1 = \sum_0^{\infty} g_j(\xi). \tag{10.3.9}$$

Поэтому, действуя несколько формально, получаем

$$\begin{aligned} 1 &= \Big[\sum_{j=0}^{\infty} g_j(\xi)\Big]\Big[\sum_{k=0}^{\infty} g_k(\xi)\Big] = \\ &= g_0(\xi)\Big[g_0(\xi) + 2\sum_{k=1}^{\infty} g_k(\xi)\Big] + \sum_{j=1}^{\infty} g_j(\xi)\Big[g_j(\xi) + 2\sum_{k=j+1}^{\infty} g_k(\xi)\Big] = \\ &= g_0(\xi)[2 - g_0(\xi)] + \sum_{j=1}^{\infty} g_j(\xi)[g_j(\xi) + 2(1 - g_0(\xi/2^j))] = \\ &= \psi_0(\xi)[\psi_0(\xi)(2 - g_0(\xi))] + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} [\psi_0^2(\xi/2^j) - \psi_0^2(\xi/2^{j-1})][g_j(\xi) + 2(1 - g_0(\xi/2^j))]. \end{aligned} \tag{10.3.10}$$

Положим

$$\Psi_0(\xi) = \psi_0(\xi)[2 - g_0(\xi)], \tag{10.3.11}$$

$$\Psi(\xi) = [\psi_0(\xi) + \psi_0(2\xi)][2 - g_0(\xi) - g_0(2\xi)], \tag{10.3.12}$$

$$\Psi_j(\xi) = \Psi(\xi/2^j) \quad (j = 1, 2, \dots). \tag{10.3.13}$$

Теперь равенство левой и правой частей в (10.3.10) можно переписать в виде (см. (10.1.3))

$$1 = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j(\xi)\psi_j(\xi). \tag{10.3.14}$$

Немного ниже мы проверим это соотношение более аккуратно.

В следующем предложении по функции $\varphi_0(x)$ определяются ее преобразование Фурье $\psi_0(\xi)$ и $g_0(\xi) = \psi_0^2(\xi)$, затем функции $\Psi_0(\xi)$, $\Psi(\xi)$ и $\Psi_j(\xi)$ формулами (10.3.11)—(10.3.13) и их обратные преобразования Фурье $\Phi_0(x)$, $\Phi(x)$ и $\Phi_j(x)$.

Предложение 10.3.2. *Пусть $\varphi_0(x)$ — функция из $\mathcal{S}$, ее носитель лежит в конусе $-K$ и она удовлетворяет условиям* (10.2.1) *с некоторым неотрицательным N. Тогда*:

1. *Функции $\Phi_0(x)$ и $\Phi(x)$ тоже принадлежат $\mathcal{S}$, их носители лежат в $-K$, а функции $\Psi_0(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ удовлетворяют условиям*

$$|\Psi_0(\xi) - 1| \leqslant C'_N|\xi|^N, \quad |\Psi(\xi)| \leqslant C'_N|\xi|^N \tag{10.3.15}$$

с не зависящими от ξ постоянными.

2. *Справедливо соотношение* (10.3.5).

Во втором неравенстве можно C'_N заменить на $C'_{N,M}(1 + |\xi|)^{-M}$.

Доказательство. 1. Утверждение о принадлежности функций $\Phi_0(x)$ и $\Phi(x)$ к $\mathcal{S}$ очевидно, так как произведение функций из $\mathcal{S}$ принадлежит $\mathcal{S}$. Утверждение о носителях следует из того, что, как мы уже упоминали, носитель свертки двух функций лежит в арифметической сумме носителей этих функций, а она в нашем случае лежит в $-K$, и это соображение можно применять повторно. Оценки (10.3.15) получаются так. Мы имеем

$$1 - g_0(\xi) = [1 - \psi_0(\xi)][1 + \psi_0(\xi)] = O(|\xi|^N)$$

при $\xi \to 0$, поэтому

$$\Psi_0(\xi) - 1 = [\psi_0(\xi) - 1] + \psi_0(\xi)[1 - g_0(\xi)] = O(|\xi|^N).$$

Далее, конечно, и $1 - g_0(2\xi) = O(|\xi|^N)$, поэтому

$$\Psi(\xi) = [\psi_0(\xi) + \psi_0(2\xi)][(1 - g_0(\xi)) + (1 - g_0(2\xi))] = O(|\xi|^N).$$

2. Приведем более аккуратную проверку соотношения (10.3.14). Элементарная выкладка показывает, что (см. (10.1.2))

$$\Psi(\xi)\psi(\xi) = \Psi_0(\xi)\psi_0(\xi) - \Psi_0(2\xi)\psi_0(2\xi). \tag{10.3.16}$$

Поэтому

$$\sum_0^m \Psi_j(\xi)\psi_j(\xi) = \Psi_0(\xi/2^m)\psi_0(\xi/2^m). \tag{10.3.17}$$

Так как $\Psi_0(0) = 1$, то получаем, что *равенство* (10.3.14) *справедливо в каждой точке* ξ *и сходимость равномерна в любой ограниченной области*.

Из (10.3.14) получаем формулу

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\Phi_j * \varphi_j)(x) = \delta(x) \tag{10.3.18}$$

в $S'(\mathbb{R}^n_x)$. Это формула вида (10.2.2), но только с функциями $\Phi_j * \varphi_j$ вместо φ_j. В частности, эта формула верна на основных функциях из $\mathcal{S}(\Omega)$. $\square$

10.4. Оператор продолжения. Пусть φ_0 — функция из $\mathcal{S}$ с носителем в конусе $-K$, удовлетворяющая условиям (10.2.1). Используя построенную в п. 10.3 систему функций $\Phi_j(x)$, положим

$$v = \sum_0^{\infty} \Phi_j * (\varphi_j * u)_\Omega. \tag{10.4.1}$$

Напоминаем, что $(\varphi_j * u)_\Omega$ — это продолжение функции внутри скобок нулем вне Ω.

Следующая теорема является основной в настоящем пункте.

Теорема 10.4.1. 1. *При* $|s| < N$ *это ограниченный оператор продолжения функций из* $H^s(\Omega)$ *до функций из* $H^s(\mathbb{R}^n)$.

2. *Норма в* $H^s(\Omega)$ *эквивалентна норме* (10.3.4).

Первое утверждение означает, что при $u \in H^s(\Omega)$ ряд (10.4.1) сходится в $H^s(\mathbb{R}^n)$, сужение $v|_\Omega$ совпадает с u в $H^s(\Omega)$ и

$$\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{H^s(\Omega)} \tag{10.4.2}$$

с постоянной, не зависящей от u. Функция $\varphi_j * u$ внутри скобок гладкая, поскольку $\varphi_j \in \mathcal{S}$. Второе утверждение наполовину уже проверено в предыдущем пункте.

Для доказательства этой теоремы понадобятся два вспомогательных утверждения.

Предложение 10.4.2. *При любом* s

$$\sum_0^\infty (1+|\xi|^2)^s 2^{-2js}|\Psi_j(\xi)|^2 \leqslant C \tag{10.4.3}$$

с постоянной, не зависящей от ξ.

Это аналог уже доказанного второго неравенства в (10.1.13) с заменой s на $-s$ и ψ_j на Ψ_j. Проходит такое же доказательство.

Предложение 10.4.3. *Пусть* $\{f_j(x)\}_0^\infty$ *— такая последовательность функций из* $L_2(\mathbb{R}^n)$*, что*

$$\sum_0^\infty 2^{2js}\|f_j(x)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} < \infty \tag{10.4.4}$$

при некотором s*. Тогда ряд*

$$v = \sum_{j=0}^\infty \Phi_j * f_j \tag{10.4.5}$$

сходится в $H^s(\mathbb{R}^n)$ *и*

$$\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leqslant C'\biggl(\sum_0^\infty 2^{2js}\|f_j\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}\biggr)^{1/2} \tag{10.4.6}$$

с постоянной C'*, зависящей только от* s.

Доказательство предложения 10.4.3. Положим $h_j(\xi)=(Ff_j)(\xi)$. Используя предыдущее предложение и неравенство Шварца, имеем

$$(1+|\xi|^2)^s\left|\sum_0^\infty \Psi_j(\xi)h_j(\xi)\right|^2 \leqslant C\sum_0^\infty 2^{2js}|h_j(\xi)|^2.$$

Остается проинтегрировать это неравенство. Если суммировать не от нуля, а от некоторого m, то справа после интегрирования будет получаться остаток сходящегося числового ряда. □

Доказательство теоремы 10.4.1. Мы уже знаем, что при $u\in H^s(\Omega)$

$$u = \sum \Phi_j * (\varphi_j * u)_\Omega$$

в Ω (см. формулу (10.3.18)) и что величина $\|u\|'_{H^s(\Omega)}$ не превосходит $C_s\|u\|_{H^s(\Omega)}$ (см. теорему 10.3.1).

Функции $(\varphi_j * u)_\Omega$ принадлежат, конечно, $L_2(\mathbb{R}^n)$. В силу предложения 10.4.3 ряд (10.4.1) сходится в $H^s(\mathbb{R}^n)$ и норма его суммы оценивается через $C'\|u\|'_{H^s(\Omega)}$.

Отсюда, в свою очередь, получается, что норма $\|u\|_{H^s(\Omega)}$ оценивается через $C'\|u\|'_{H^s(\Omega)}$, так что это эквивалентные нормы. □

Замечание 10.4.4. *При $u \in H^s(\Omega)$ ряд в* (10.3.2) *сходится к u в этом пространстве.*

Действительно, если $u \in H^s(\Omega)$, то, как мы только что видели, функции

$$\sum_0^\infty \varphi_j * u \quad \text{и} \quad \sum_0^m \varphi_j * u \tag{10.4.7}$$

имеют продолжения

$$\sum_0^\infty \Phi_j * (\varphi_j * u)_\Omega \quad \text{и} \quad \sum_0^m \Phi_j * (\varphi_j * u)_\Omega$$

на $\mathbb{R}^n$ и норма их разности в $H^s(\mathbb{R}^n)$ стремится к 0 при $m \to \infty$. Значит, обычная норма разности функций (10.4.7) в $H^s(\Omega)$ тоже стремится к нулю.

Итак, построение оператора продолжения функций из специальной липшицевой области закончено с точностью до следующего обстоятельства. Нам осталось построить функцию φ_0 с носителем в $-K$ и $N = \infty$.

Оператор продолжения функций из ограниченной липшицевой области строится после этого очевидным образом при помощи разбиения единицы.

10.5. Построение функции φ_0 с $N = \infty$. Как в [294], рассмотрим сначала однозначную аналитическую функцию

$$U(z) = \exp[-(z-1)^{1/8} - (z-1)^{-1/8}] \tag{10.5.1}$$

одного комплексного переменного на комплексной плоскости с разрезом вдоль луча $[1, \infty)$. Эта функция быстро стремится к 0 со всеми своими производными на окружностях $|z-1| = R$ при $R \to 0$ и при $R \to \infty$. В точке $z = 0$ она регулярна и отлична от нуля, а $z^k U(z)$ с натуральными k равны, конечно, нулю. Применим интегральную теорему Коши к функциям $(2\pi i)^{-1} z^{k-1} U(z)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ и двум контурам: 1) малая окружность с центром в начале координат и положительным направлением обхода, 2) контур γ, идущий из бесконечности по нижнему берегу разреза, затем по малой окружности вокруг 1 по часовой стрелке и далее в бесконечность по верхнему берегу разреза (этот контур «замыкается окружностью бесконечно большого радиуса»). Мы получим, что

$$\int_\gamma \frac{U(z)}{z}dz \neq 0, \qquad \int_\gamma \frac{z^k U(z)}{z}dz = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{10.5.2}$$

Теперь положим

$$V(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}[U(t+i0) - U(t-i0)], & t \geqslant 1, \\ 0, & t < 1. \end{cases} \tag{10.5.3}$$

Носитель этой функции — луч $[1, \infty)$. В точке 1 все ее производные справа равны нулю, и эта функция принадлежит $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Из соотношений (10.5.2) следует, что

$$\int V(t)\,dt \neq 0, \qquad \int t^k V(t)\,dt = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{10.5.4}$$

Разделяя ее вещественную и мнимую части, получаем вещественную функцию с такими же свойствами.

Положим теперь

$$\varphi_0(x_1, \ldots, x_n) = CV(x_1)\ldots V(x_n), \qquad C = \left(\int V(t)\,dt\right)^{-n}. \tag{10.5.5}$$

Носитель этой функции содержится в конусе, состоящем из всех точек с неотрицательными координатами, при этом

$$\int \varphi_0(x)\,dx = 1, \qquad \int x^\alpha \varphi_0(x)\,dx = 0 \quad (|\alpha| > 0). \tag{10.5.6}$$

Линейным однородным преобразованием и поворотом с последующей нормировкой функции его можно перевести в нужный конус $-K$ — выпуклую оболочку n лучей, выходящих из начала координат, — с сохранением свойств (10.5.6). Именно благодаря этим соотношениям функция φ_0 обладает нужными свойствами (10.2.1) с $N = \infty$.

Далее известным нам способом определяем функции φ, Φ_0, Φ и Φ_j. Получаем оператор продолжения (10.4.1), применимый к пространствам H^s при всех $s \in \mathbb{R}$.

§ 11. Граничные задачи в липшицевых областях для сильно эллиптических систем 2-го порядка

Этот класс областей содержит, как мы видели в § 9, области с очень общими негладкими границами, и такие области часто встречаются в приложениях. Наша цель состоит в выяснении того, какие общие факты имеют место для наиболее важных задач во всех этих частных случаях.

11.1. Основные определения и результаты. Здесь в отличие от § 8 мы будем рассматривать систему 2-го порядка. Ее старшая часть тоже записывается в дивергентной форме:

$$Lu := -\sum_{j,k=1}^{n} \partial_j a_{j,k}(x) \partial_k u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \partial_j u(x) + c(x)u(x) = f(x). \quad (11.1.1)$$

Здесь и дальше u и f — вектор-функции (столбцы) размерности d, так что коэффициенты — это $(d \times d)$-матрицы. Как и u и f, они состоят из комплекснозначных функций.

Запись старшей части в дивергентной форме позволяет в известной мере минимизировать предположения о гладкости коэффициентов. Проще всего предполагать, что коэффициенты $a_{j,k}(x)$ и $b_j(x)$ (точнее, элементы этих матриц) липшицевы в Ω, т. е. принадлежат $C^{0,1}(\overline{\Omega})$, а коэффициент $c(x)$ ограничен и измерим. *Мы об этом условимся.* Но во многих случаях можно предположить существенно меньше, и мы обычно будем это отмечать. В настоящем параграфе в постановках задач все коэффициенты можно считать ограниченными и измеримыми. Но в теореме 11.1.1 нужна непрерывность старших коэффициентов в $\overline{\Omega}$. Далее, в тех местах, где нужен формально сопряженный к L оператор (см. (11.1.22)), приходится дифференцировать $b_j(x)$ и удобно эти коэффициенты считать липшицевыми.

Замечание. Интересны также системы с неограниченными коэффициентами в младших членах из подходящих классов L_p. См., например, [28], а также [89]. Но мы не будем их рассматривать.

Можно при желании принять, как в § 8, что

$$a_{j,k}(x) = a_{k,j}(x), \quad (11.1.2)$$

но это не необходимо.

Запишем соответствующую форму $\Phi_\Omega(u, v)$:

$$\int_\Omega \Big[\sum a_{j,k}(x) \partial_k u(x) \cdot \partial_j \overline{v(x)} + \sum b_j(x) \partial_j u(x) \cdot \overline{v(x)} + c(x)u(x) \cdot \overline{v(x)} \Big]\, dx; \quad (11.1.3)$$

она определена и ограничена на функциях из $H^1(\Omega)$, даже если все коэффициенты принадлежат только $L_\infty(\Omega)$.

Первая формула Грина имеет вид

$$(Lu, v)_\Omega = \Phi_\Omega(u, v) - (T^+u, v^+)_\Gamma \tag{11.1.4}$$

и выводится сначала при $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ интегрированием по частям. Старшие коэффициенты при этом предполагаются принадлежащими $C^{0,1}(\overline{\Omega})$. Затем она распространяется предельным переходом на $u \in H^s(\Omega)$, $s > 3/2$. При этом *гладкая конормальная производная* T^+u определяется формулой

$$T^+u(x) = \sum \nu_j(x) a_{j,k}(x) \gamma^+ \partial_k u(x). \tag{11.1.5}$$

Но в общем случае функций $u, v \in H^1(\Omega)$, как мы уже отмечали в § 8, справедливость формулы (11.1.4) *постулируется* и эта формула рассматривается 1) как определение конормальной производной $T^+u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ по заданным u и $f = Lu$ (см. лемму 4.1 в [87]), 2) как определение решения задачи Неймана по заданным f и конормальной производной. Все коэффициенты достаточно при этом считать ограниченными и измеримыми.

11.1a. Поясним и уточним это следующим образом.

Рассмотрим сначала задачу Дирихле с однородным граничным условием:

$$Lu = f_0 \ \text{в } \Omega, \quad u^+ = 0. \tag{11.1.6}$$

В этом случае формула Грина пишется в виде

$$\Phi_\Omega(u, v) = (f_0, v)_\Omega \quad (u, v \in \widetilde{H}^1(\Omega)); \tag{11.1.7}$$

конормальная производная сюда не входит. Если мы задали $u \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, то в левой части этой формулы возник непрерывный антилинейный функционал, правая часть — это его запись с однозначно определенным элементом $f_0 \in H^{-1}(\Omega)$ с использованием двойственности между пространствами $\widetilde{H}^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$.

Обратим внимание на то, что f_0 как функционал над $\widetilde{H}^1(\Omega)$ строится по u в Ω по правилам действий с обобщенными функциями: дифференцирования и умножения на коэффициенты переносятся на v. Таким образом, этот функционал определяется заданием u однозначно. (Если коэффициенты бесконечно гладкие, то f_0 — просто обобщенная функция над $C_0^\infty(\Omega)$ и этот функционал предельным переходом распространяется на $\widetilde{H}^1(\Omega)$.)

Теперь рассмотрим задачу Неймана сначала с однородным граничным условием:

$$Lu = f_1 \text{ в } \Omega, \quad T^+u = 0. \tag{11.1.8}$$

Формула Грина пишется в виде

$$\Phi_\Omega(u, v) = (f_1, v)_\Omega \quad (u, v \in H^1(\Omega)), \tag{11.1.9}$$

и нулевая конормальная производная сюда не вошла. Если мы задали $u \in H^1(\Omega)$, то левая часть — непрерывный антилинейный функционал над $H^1(\Omega)$, он записывается в виде правой части с однозначно определенным элементом f_1 из $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ с использованием двойственности между пространствами $H^1(\Omega)$ и $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$. При этом сужение f_0 функционала f_1 на $\widetilde{H}^1(\Omega)$ однозначно строится внутри области, как в предыдущем случае.

Можем ли мы, не меняя левой части, заменить f_1 другим функционалом f из $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$? Да, при условии, что его сужение на $\widetilde{H}^1(\Omega)$ совпадает с тем же f_0. Но тогда $(f_1 - f, v)_\Omega$ — функционал на $H^1(\Omega)$, сосредоточенный на границе, и мы знаем, что он представим в виде $(h, v)_\Gamma$ с $h \in H^{-1/2}(\Gamma)$ (см. п. 9.2). Этот элемент h и есть конормальная производная T^+u, и формула Грина принимает вид

$$\Phi_\Omega(u, v) = (f, v)_\Omega + (T^+u, v^+)_\Gamma \quad (u, v \in H^1(\Omega)). \tag{11.1.10}$$

Это формула Грина для задачи Неймана с неоднородным граничным условием. Задав f, мы однозначно определяем $h = T^+u$.

Неудобство здесь состоит во взаимной зависимости f и h. Мы вернемся к ней ниже; сначала рассмотрим более простые задачи Дирихле и Неймана с однородными граничными условиями.

Обозначения f_0 и f_1 в этих пояснениях были временными, в дальнейшем правая часть уравнения всегда будет обозначаться через f.

11.1b. Через $a(x, \xi)$ обозначаем главный символ $\sum a_{j,k}(x)\xi_j\xi_k$. Условие сильной эллиптичности [126] имеет вид

$$\operatorname{Re} a(x, \xi) := \frac{1}{2}[a(x, \xi) + a^*(x, \xi)] \geqslant C_0|\xi|^2 I, \tag{11.1.11}$$

$C_0 > 0$, в смысле неравенства для соответствующих квадратичных форм. Из условия (11.1.11) выводится *коэрцитивность формы $\Phi_\Omega(u, u)$, или неравенство Гординга, на пространстве $\widetilde{H}^1(\Omega)$*:

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)} \leqslant C_1 \operatorname{Re} \Phi_\Omega(u, u) + C_2\|u\|^2_{H^0(\Omega)}. \tag{11.1.12}$$

Теорема 11.1.1. *Пусть старшие коэффициенты* $a_{j,k}(x)$ *непрерывны в* $\overline{\Omega}$, *остальные коэффициенты ограничены и измеримы, и пусть выполнено условие* (11.1.11) *сильной эллиптичности. Тогда существуют такие постоянные* $C_1 > 0$ *и* $C_2 \geqslant 0$, *что для функций из* $\widetilde{H}^1(\Omega)$ *справедливо неравенство* (11.1.12).

Доказательство. В скалярном случае доказательство совсем простое, оно указано в § 8. В этом случае достаточно считать, что $a_{j,k} \in L_\infty(\Omega)$. В общем случае воспользуемся методом замораживания коэффициентов, как в §§ 6 и 7. Пусть сначала форма $\Phi_\Omega(u,u)$ содержит только старшие члены. Оценивать надо, конечно, L_2-нормы первых производных. Если коэффициенты постоянны — заморожены в точке x_0, то неравенство в $\mathbb{R}^n$

$$\sum \int |\partial_j u|^2 \, dx \leqslant C_0^{-1} \operatorname{Re} \Phi_\Omega(u,u)$$

получается из (11.1.11) при помощи преобразования Фурье и равенства Парсеваля:

$$\int \sum |\xi_j|^2 |(Fu)(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant C_0^{-1} \operatorname{Re} \int \sum a_{j,k}(x_0) \xi_k \xi_j (Fu)(\xi) \cdot \overline{(Fu)(\xi)} \, d\xi.$$

Здесь существенно, что фактически надо рассматривать функции, определенные на $\mathbb{R}^n$. (Мы могли сформулировать теорему для функций из $\mathring{H}^1(\Omega)$; тогда мы продолжили бы эти функции нулями вне Ω.) Если коэффициенты «почти постоянны» — близки к их значениям в точке x_0, то запишем

$$a_{j,k}(x) = a_{j,k}(x_0) + [a_{j,k}(x) - a_{j,k}(x_0)],$$

и если все разности в квадратных скобках достаточно малы, то получим неравенство

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)} \leqslant 2C_0^{-1} \operatorname{Re} \Phi_\Omega(u,u) + C_3 \|u\|^2_{H^0(\Omega)}.$$

В общем случае надо использовать разбиение единицы вида $\sum \varphi_r^2 = 1$, состоящее из бесконечно гладких функций φ_r с достаточно мелкими носителями. Мы получим

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)} = \sum \int_\Omega \varphi_r^2 (|\nabla u|^2 + |u|^2) \, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \sum (\operatorname{Re} \Phi_\Omega(\varphi_r u, \varphi_r u)_\Omega + \|\varphi_r u\|^2_{L_2(\Omega)}) + \ldots \leqslant C_5 \operatorname{Re} \Phi_\Omega(u,u) + \ldots,$$

и здесь члены, обозначенные многоточием, оцениваются через

$$C_7[\|u\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}\|u\|_{H^0(\Omega)}+\|u\|^2_{H^0(\Omega)}]\leqslant\varepsilon\|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)}+C_\varepsilon\|u\|^2_{H^0(\Omega)}$$

со сколь угодно малым ε. Это приводит нас к цели.

Если есть ненулевые b_j, то пользуемся оценкой промежуточных норм (5.1.9). Она остается справедливой в липшицевой области. □

Если старшие и средние коэффициенты в L фиксированы, то при достаточно большом $\operatorname{Re} c$ последний член в (11.1.12) не нужен и это неравенство принимает вид

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)}\leqslant C_1\operatorname{Re}\Phi_\Omega(u,u). \tag{11.1.13}$$

Указанное условие для c не всегда нужно, см. замечание 8.1.3.

Будем предполагать, что располагаем этим *сильным условием коэрцитивности*, или *сильным неравенством Гординга*. По теореме Лакса—Мильграма (п. 17.2) оно влечет однозначную разрешимость задачи Дирихле с однородным граничным условием.

Неравенство (11.1.12) влечет ее фредгольмовость с нулевым индексом в силу тех же соображений, что и в замечании 8.1.7.

Коэрцитивность формы $\Phi_\Omega(u,u)$ *на* $H^1(\Omega)$, т. е. неравенство

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\leqslant C_1\operatorname{Re}\Phi_\Omega(u,u)+C_2\|u\|^2_{H^0(\Omega)}, \tag{11.1.14}$$

в матричном случае имеет место для сильно эллиптических систем далеко не всегда. См. п. 11.8. Известны достаточные условия. Запишем старшую часть подынтегрального выражения в форме $\Phi_\Omega(u,v)$ подробно в виде

$$\sum a^{r,s}_{j,k}(x)\partial_k u_s\partial_j\bar{v}_r. \tag{11.1.15}$$

Условие

$$\sum|\zeta^r_j|^2\leqslant C_3\operatorname{Re}\sum a^{r,s}_{j,k}(x)\zeta^s_k\overline{\zeta^r_j} \tag{11.1.16}$$

с произвольными комплексными ζ^r_j, достаточное в матричном случае при $a_{j,k}=a_{k,j}$ (см. доказательство теоремы 8.1 в скалярном случае), слишком обременительно (см., например, [87, с. 307]). На наш взгляд, особенно удобно следующее условие, если $d=n$:

$$\sum|\zeta^r_j+\zeta^j_r|^2\leqslant C_4\operatorname{Re}\sum a^{r,s}_{j,k}(x)\zeta^s_k\overline{\zeta^r_j} \tag{11.1.17}$$

при любых комплексных ζ^r_j. Достаточность этого условия следует из справедливости замечательного (*второго*) *неравенства Корна*

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\leqslant C_5\Big[\|u\|^2_{L_2(\Omega)}+\sum_{j,r}\|\partial_j u_r+\partial_r u_j\|^2_{L_2(\Omega)}\Big]. \tag{11.1.18}$$

Относительно его доказательства и использования см., например, [43] или [87]. Чтобы получить неравенство (11.1.14) из (11.1.17), надо в (11.1.17) подставить $\zeta_j^r = \partial_j u_r$ и проинтегрировать.

На случай, когда $d \neq n$, условие (11.1.17) можно обобщить, полагая «недостающие» ζ_j^r равными нулю.

Условие (11.1.17) применимо к системам теории упругости. Важнейшая из них — *система Ламе* для изотропных однородных сред:

$$-\mu\Delta u - (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, u = f. \tag{11.1.19}$$

Здесь u — вектор смещения, $d = n$. Это важный пример, и мы к нему вернемся в п. 11.8. Эта система и ее ближайшие обобщения в трехмерных областях с гладкой границей подробно изучены, в частности, в монографии [26], где можно найти многочисленные дальнейшие ссылки. Более общими являются системы теории упругости для анизотропных однородных и неоднородных сред. Эти системы имеют вещественные коэффициенты $a_{j,k}(x)$ (не зависящие от x в первом случае) с условиями симметрии

$$a_{j,k}^{r,s} = a_{k,j}^{r,s}, \quad a_{j,k}^{r,s} = a_{r,s}^{j,k} \quad \text{и} \quad a_{j,k}^{r,s} = a_{r,k}^{j,s}. \tag{11.1.20}$$

Наиболее важны случаи $d = n = 2$ и 3. Отметим глубокое исследование трехмерной системы анизотропной упругости для однородных сред в диссертации [41]; см. также [278]. Однако эти системы рассматривают и при бóльших $d = n$, см., например, [43].

Другие условия, достаточные для коэрцитивности (включая уравнения и системы высших порядков), см., например, в книгах [64] и [91].

Следует отметить, что наличие или отсутствие коэрцитивности на $H^1(\Omega)$ зависит от записи системы в дивергентной форме. Примеры читатель найдет в п. 11.8. Эта запись влияет на запись формы $\Phi_\Omega(u, u)$. В случае задачи Дирихле эта запись безразлична, что видно из доказательства теоремы 11.1.1: там важен только главный символ оператора L, поскольку при замороженных коэффициентах используются преобразование Фурье и равенство Парсеваля.

Если есть коэрцитивность на $H^1(\Omega)$, т. е. справедливо неравенство (11.1.14), то последний член снова становится излишним при достаточно большом $\mathrm{Re}\, c$:

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant C_1 \,\mathrm{Re}\, \Phi_\Omega(u, u). \tag{11.1.21}$$

Условимся говорить, что это *сильная коэрцитивность формы* Φ_Ω *на* $H^1(\Omega)$. Если мы имеем это неравенство, то задача Неймана с однородным граничным условием оказывается однозначно разрешимой снова в силу теоремы Лакса—Мильграма (а если справедливо только неравенство (11.1.14), то она фредгольмова с нулевым индексом).

11.1c. Оператор, формально сопряженный к L, имеет вид

$$\widetilde{L}v = -\sum_{j,k=1}^{n} \partial_j a_{k,j}^*(x)\partial_k v(x) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j [b_j^*(x)v(x)] + c^*(x)v(x). \quad (11.1.22)$$

Здесь структура средних членов не такая, как в (11.1.1). Но при $b_j \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ эта формула приводится к аналогичному (11.1.1) виду

$$\widetilde{L}v = -\sum_{j,k=1}^{n} \partial_j a_{k,j}^*(x)\partial_k v(x) - \sum b_j^*(x)\partial_j v(x) + \\ + \left[c^*(x) - \sum \partial_j b_j^*(x)\right] v(x). \quad (11.1.23)$$

Соответствующую (гладкую) конормальную производную на функциях из $H^s(\Omega)$, $s > 3/2$, определим тогда формулой

$$\widetilde{T}^+ v(x) = \sum \nu_j(x) a_{k,j}^*(x)\gamma^+ \partial_k v(x) + \sum \nu_j(x) b_j^*(x) v^+(x). \quad (11.1.24)$$

При таком ее определении мы имеем первую формулу Грина для $\widetilde{L}$ с той же формой Φ_Ω,

$$(u, \widetilde{L}v)_\Omega = \Phi_\Omega(u, v) - (u^+, \widetilde{T}^+ v)_\Gamma, \quad (11.1.25)$$

и вторую формулу Грина

$$(Lu, v)_\Omega - (u, \widetilde{L}v)_\Omega = (u^+, \widetilde{T}^+ v)_\Gamma - (T^+ u, v^+)_\Gamma. \quad (11.1.26)$$

Эта формула выводится, если $u, v \in H^s(\Omega)$ с $s > 3/2$. В общем же случае функций $u, v \in H^1(\Omega)$ и коэффициентов из $L_\infty(\Omega)$ она следует из постулируемых первых формул Грина для L и $\widetilde{L}$, при этом в первой формуле Грина для $\widetilde{L}$ форма Φ_Ω берется такой же, как для L.

Замечание. Благодаря совпадению форм для L и $\widetilde{L}$ условия коэрцитивности на $\widetilde{H}^1(\Omega)$ или на $H^1(\Omega)$ имеют место для операторов L и $\widetilde{L}$ одновременно.

Для формальной самосопряженности оператора L достаточны условия

$$a_{j,k} = a_{k,j}^*, \quad b_j = 0, \quad c = c^*.$$

Более общие условия формальной самосопряженности записываются в виде

$$a_{j,k} = a_{k,j}^*, \quad b_j = -b_j^*, \quad c = c^* - \sum \partial_j b_j^*. \quad (11.1.27)$$

Разберемся в этом более внимательно: нам ведь надо рассматривать задачи не на финитных гладких функциях в $\mathbb{R}^n$, а на функциях в области Ω. При этих условиях на функциях из $\widetilde{H}^1(\Omega)$

$$(Lu, v)_\Omega = (u, Lv)_\Omega \tag{11.1.28}$$

и

$$\Phi_\Omega(u, v) = \overline{\Phi_\Omega(v, u)}. \tag{11.1.29}$$

Если же мы хотим иметь (11.1.29) на всех функциях из $H^1(\Omega)$, то нужно добавить соотношение

$$\sum \nu_j(x) b_j(x) = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \tag{11.1.30}$$

что проверяется интегрированием по частям. Тогда гладкие конормальные производные для L и $\widetilde{L}$ одинаковы. В этом случае будем говорить о *формальной самосопряженности оператора L в $\overline{\Omega}$*. При рассмотрении задачи Дирихле с однородным граничным условием условие (11.1.30) несущественно. Разумеется, если все b_j равны 0 на Γ, то вообще нет никаких проблем.

Для операторов, отвечающих задачам Дирихле и Неймана с однородными граничными условиями, мы, как в § 8, будем использовать соответственно обозначения $\mathcal{L}_D$ и $\mathcal{L}_N$. Сейчас мы их рассматриваем как ограниченные операторы соответственно из $\widetilde{H}^1(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega)$ и из $H^1(\Omega)$ в $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$. Сопряженными к ним относительно соответствующих продолжений скалярного произведения в $L_2(\Omega)$ являются операторы $\widetilde{\mathcal{L}}_D$ и $\widetilde{\mathcal{L}}_N$. Это сопряженность в смысле теории ограниченных операторов в банаховых пространствах (см. п. 17.1).

Сформулируем основной результат.

Теорема 11.1.2. *Если форма Φ_Ω сильно коэрцитивна на $\widetilde{H}^1(\Omega)$, то оператор $\mathcal{L}_D$ обратим. Если есть только коэрцитивность* (*сильная эллиптичность*), *то он фредгольмов с нулевым индексом. Такие же утверждения верны для оператора $\widetilde{\mathcal{L}}_D$. При этом для разрешимости уравнения $\mathcal{L}_D u = f$ необходима и достаточна ортогональность f ко всем элементам v ядра оператора $\widetilde{\mathcal{L}}_D$ относительно продолжения формы $(f, v)_\Omega$.*

Если форма Φ_Ω сильно коэрцитивна на $H^1(\Omega)$, то оператор $\mathcal{L}_N$ обратим. Если есть только коэрцитивность, то он фредгольмов с нулевым индексом. Такие же утверждения верны для оператора $\widetilde{\mathcal{L}}_N$. При этом уравнение $\mathcal{L}_N u = f$ разрешимо тогда и только тогда, когда f ортогонально всем решениям уравнения $\widetilde{\mathcal{L}}_N v = 0$ относительно продолжения формы $(f, v)_\Omega$.

Аналогичные утверждения верны в отношении условий разрешимости уравнений с операторами $\widetilde{\mathcal{L}}_D$ *и* $\widetilde{\mathcal{L}}_N$.

Замечание. Однозначная разрешимость задачи Дирихле с однородным граничным условием для уравнения $Lu=f$ равносильна тому, что форма $\Phi_\Omega(u,v)$ с произвольным $u\in\widetilde{H}^1(\Omega)$ — общий вид непрерывного антилинейного функционала над $\widetilde{H}^1(\Omega)$. Аналогично однозначная разрешимость задачи Неймана с однородным граничным условием равносильна тому, что эта форма с произвольным $u\in H^1(\Omega)$ — общий вид непрерывного антилинейного функционала над $H^1(\Omega)$.

11.1d. Рассмотрим теперь задачу Дирихле с неоднородным граничным условием

$$Lu=f \ \text{ в } \ \Omega, \quad u^+=g. \tag{11.1.31}$$

Переход к ней требует добавочных соглашений. Здесь $u\in H^1(\Omega)$, $g\in H^{1/2}(\Gamma)$. В отношении f мы *предположим, что* $f\in H^{-1}(\Omega)$.

Пусть u_0 — *любая* функция из $H^1(\Omega)$ с граничным значением g: $u_0^+=g$. Определим $f_0=Lu_0\in H^{-1}(\Omega)$ формулой

$$(f_0,v)_\Omega=\Phi_\Omega(u_0,v), \quad v\in\widetilde{H}^1(\Omega). \tag{11.1.32}$$

Решением задачи (11.1.31) *назовем* функцию $u=u_0+u_1$, где u_1 — решение задачи

$$Lu_1=f-f_0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad u_1^+=0, \tag{11.1.33}$$

т. е.

$$(f-f_0,v)_\Omega=\Phi_\Omega(u_1,v), \quad v\in\widetilde{H}^1(\Omega). \tag{11.1.34}$$

Здесь $u_1\in\widetilde{H}^1(\Omega)$.

Мы предполагаем выполненным условие сильной коэрцитивности формы Φ_Ω на $\widetilde{H}^1(\Omega)$, так что $u_1\in\widetilde{H}^1(\Omega)$ определяется однозначно.

Проверим, что *u не зависит от выбора* u_0. Пусть $\widehat{u}_0$ — еще одна функция из $H^1(\Omega)$ с граничным значением g. Определим $\widehat{f}_0$ по $\widehat{u}_0$ формулой вида (11.1.32) и $\widehat{u}_1$ формулой вида (11.1.34) с $\widehat{f}_0$ вместо f_0. Тогда

$$(\widehat{f}_0-f_0,v)_\Omega=\Phi_\Omega(u_1-\widehat{u}_1,v), \quad v\in\widetilde{H}^1(\Omega),$$

т. е.

$$\Phi_\Omega(\widehat{u}_0-u_0,v)=\Phi_\Omega(u_1-\widehat{u}_1,v), \quad v\in\widetilde{H}^1(\Omega).$$

Отсюда

$$\widehat{u}_0 - u_0 = u_1 - \widehat{u}_1$$

в $\widetilde{H}^1(\Omega)$, так что $u_0 + u_1 = \widehat{u}_0 + \widehat{u}_1$.

Мы показали, что задача (11.1.31) однозначно разрешима.

Неоднородная задача Неймана

$$Lu = f \ \text{ в } \Omega, \quad Tu^+ = h \tag{11.1.35}$$

проще в том отношении, что, как мы отметили в § 8, граничный член в формуле Грина можно включить в форму $(f, v)_\Omega$, изменив f.

Итак, справедлива

Теорема 11.1.3. *При предположениях теоремы* 11.1.2 *результаты обобщаются на полные задачи Дирихле* (*с* $f \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$) *и Неймана* (*с* $f \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega)$, $h \in H^{-1/2}(\Gamma)$).

Замечание. Для решения полной задачи Дирихле тоже можно указать вариационную постановку — написать формулу Грина

$$\Phi_\Omega(u, v) = (f, v)_\Omega, \quad v \in \widetilde{H}^1(\Omega).$$

Но здесь надо указывать, что $u \in H^1(\Omega)$ и $f \in H^{-1}(\Omega)$. Кроме того, условие $u^+ = g$ здесь не учтено, и его надо оговаривать отдельно (как в [87]).

Как изменится эта формула, если мы хотим распространить ее на $v \in H^1(\Omega)$? В этом случае надо расширить f до функционала из $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$, u станет решением уравнения $Lu = f$ с новой правой частью и справа, вообще говоря, добавится слагаемое с конормальной производной.

В классической постановке функция u всегда подчиняется уравнению внутри области, но при слабой постановке с правой частью из $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ и пробными функциями из $H^1(\Omega)$ это уже не так. Как справедливо отмечено в [271], включая в правую часть уравнения слагаемое, сосредоточенное на границе, мы получаем уравнение в $\overline{\Omega}$.

Для решений задачи Дирихле (11.1.31) имеет место *двусторонняя априорная оценка*. При сильной коэрцитивности формы Φ_Ω на $\widetilde{H}^1(\Omega)$ она имеет вид

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_3 \left[\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \right] \leqslant C_4 \|u\|_{H^1(\Omega)}. \tag{11.1.36}$$

Сейчас мы проверим только левое неравенство, а правое — при $f = 0$ или $g = 0$. Завершим доказательство правого неравенства мы в п. 11.2.

Если $g=0$, то из формулы Грина и сильного неравенства Гординга на $\widetilde{H}^1(\Omega)$ получаем

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)} \leqslant C_1 \operatorname{Re}\Phi_\Omega(u,u) = C_1 \operatorname{Re}(f,u)_\Omega \leqslant C_2\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}$$

с использованием обобщенного неравенства Шварца. Поэтому

$$\|u\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)} \leqslant C_2\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}. \tag{11.1.37}$$

С другой стороны, так как форма $\Phi_\Omega(u,v)$ ограничена на прямом произведении двух пространств $\widetilde{H}^1(\Omega)$, то

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant C_3 \sup_{v\neq 0}\frac{|(f,v)_\Omega|}{\|v\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}} = C_3 \sup_{v\neq 0}\frac{|\Phi_\Omega(u,v)|}{\|v\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}} \leqslant C_4\|u\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}. \tag{11.1.38}$$

Далее, если $f=0$, то считаем, что $\|u_0\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_5\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ (используя ограниченность правого обратного оператора к оператору перехода к следу), и получаем аналогично (11.1.38)

$$\|f_0\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant C_4\|u_0\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_6\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)},$$

так что

$$\|u_1\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)} \leqslant C_7\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \text{и} \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant (C_5+C_7)\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Далее,

$$\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant C_8\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

по теореме о следе.

Полная задача Дирихле сводится к двум задачам с $g=0$ и с $f=0$, поэтому получаем также левое неравенство в (11.1.36).

Сформулируем окончательный результат в отношении задачи Дирихле, считая проверенной двустороннюю оценку.

Теорема 11.1.4. *Если форма Φ_Ω сильно коэрцитивна на $\widetilde{H}^1(\Omega)$, то отвечающий задаче Дирихле* (11.1.31) *оператор $u\to(f,g)$ взаимно однозначно и непрерывно отображает пространство $H^1(\Omega)$ на пространство $H^{-1}(\Omega)\times H^{1/2}(\Gamma)$ и обратим*; *имеет место двусторонняя оценка* (11.1.36). *Если есть только сильная эллиптичность, то этот оператор фредгольмов с нулевым индексом*; *в этом случае в среднюю часть оценки добавляется слагаемое $\|u\|_{H^0(\Omega)}$.*

Априорная оценка для однозначно разрешимой задачи Неймана имеет вид

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_5\big[\|f\|_{\widetilde{H}^{-1}(\Omega)} + \|h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\big]. \tag{11.1.39}$$

При $f=0$ или $h=0$ имеет место двусторонняя оценка. Мы здесь не будем это проверять и вернемся к этому вопросу в п. 11.2. Двусторонней оценки в общем случае пока нет, поскольку f и h не независимы.

11.1e. Вернемся к многозначности в определении правой части уравнения и конормальной производной в задаче Неймана.

В § 8 мы отметили, что иногда она устраняется специальным соглашением. В частности, так поступают, если правая часть f системы $Lu=f$ задана в $L_2(\Omega)$ (например, равна нулю), к ней тогда уже не присоединяют функционал, сосредоточенный на границе.

Наметим соображения Костабеля [217]. Пусть для простоты коэффициенты в L бесконечно гладкие. Обозначим через $H^1_L(\Omega)$ подпространство в $H^1(\Omega)$, состоящее из таких u, что Lu в Ω в смысле обобщенных функций принадлежит $L_2(\Omega)$. В этом пространстве норма вводится формулой

$$\|u\|^2_{H^1_L(\Omega)} = \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|Lu\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{11.1.40}$$

В [76] в случае, когда L — лапласиан, показано, что линеал $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотен в $H^1_L(\Omega)$. Костабель отмечает, что доказательство дословно сохраняется для любого L и что это позволяет, аппроксимируя функции u из $H^1_L(\Omega)$ функциями $u_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$, определить для них конормальную производную формулой

$$(T^+u, v)_\Gamma = \lim_{j\to\infty} \big[\Phi_\Omega(u_j, v) - (Lu_j, v)\big] \quad (v \in H^1(\Omega)), \tag{11.1.41}$$

т. е. как предел гладких конормальных производных. Для гладких решений это гладкая конормальная производная.

С. Е. Михайлов в работах [271], [272] предложил конструкцию «канонической» конормальной производной для таких решений, что $f=Lu$ принадлежит $\widetilde{H}^{-1/2}(\Omega)$. В этом случае f не содержит слагаемого с носителем на границе и конормальная производная определяется однозначно.

В монографии Г. Хсиао — В. Вендланда [79, гл. 5], правые части системы $Lu=f$ предполагаются принадлежащими ортогональному дополнению в $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ к подпространству функционалов, сосредоточенных на Г. Таким образом, последние не включаются в правые части системы. То, что мы предложим в следующем пункте в этом плане (в подпункте 11.2e), можно рассматривать как другую реализацию этой идеи.

Суть дела состоит в том, что функционалы $\Phi_\Omega(u,v)$ над $v\in H^1(\Omega)$ можно по-разному представлять парами (f,h) в виде

$$(f,v)_\Omega+(h,v^+)_\Gamma.$$

Изоморфизма между пространством решений u и пространством пар нет. Каждой паре (f,h) отвечает ровно одно решение u, но одному u отвечает бесконечно много пар (f,h). Никакой патологии в этом нет, так «устроена жизнь», но есть неудобство. Можно пытаться строить изоморфизм между пространством решений u и пространством некоторых пар (f,h), однозначно представляющих все (непрерывные антилинейные) функционалы над $H^1(\Omega)$, и в следующем пункте мы предпринимаем такую попытку.

Полученные в настоящем пункте результаты являются предпосылкой для рассмотрений в п. 11.2.

11.2. Разложение Вейля пространства $H^1(\Omega)$ и выбор f и h.

11.2а. Используемая здесь идея разложения пространства $H^1(\Omega)$ восходит в скалярном случае к Г. Вейлю и понадобилась ему в его работе [125].

Пространство $H^1(\Omega)$ гильбертово, а $\widetilde{H}^1(\Omega)=\mathring{H}^1(\Omega)$ — (замкнутое) подпространство в нем. Поэтому оно дополняемо, и мы этим уже пользовались (см., например, замечание с формулой (9.2.8)). Мы теперь можем удобным образом указать другое прямое дополнение к нему.

Теорема 11.2.1. *Пусть форма Φ_Ω сильно коэрцитивна на $\widetilde{H}^1(\Omega)$. Тогда пространство $H^1(\Omega)$ является прямой суммой $H_1\dotplus H_2$ подпространства $H_1=\widetilde{H}^1(\Omega)=\mathring{H}^1(\Omega)$ функций с нулевыми граничными значениями и подпространства H_2 решений однородной системы $Lu=0$ в Ω.*

Здесь «в Ω» означает «внутри Ω» в том смысле, что разложение строится с использованием однозначной разрешимости задачи Дирихле и пробные функции берутся из $\widetilde{H}^1(\Omega)$.

Доказательство теоремы. Очевидно, что H_2 — тоже (замкнутое) подпространство в $H^1(\Omega)$. В силу единственности для задачи Дирихле, в $\widetilde{H}^1(\Omega)$ нет ненулевых решений уравнения $Lu=0$ в Ω. Поэтому пересечение $H_1\cap H_2$ состоит из одного нуля.

Проекторы P_1 и P_2 в $H^1(\Omega)$ соответственно на H_1 и H_2 строятся с использованием однозначной разрешимости задачи Дирихле следующим образом. Пусть $u\in H^1(\Omega)$. Обозначим через u_2 решение задачи Дирихле

$$Lu_2 = 0 \text{ в } \Omega, \quad u_2^+ = u^+ \tag{11.2.1}$$

и положим $u_1 = u - u_2$. Тогда $u_2 \in H_2$ и $u_1 \in H_1$. Мы видим, что $P_1 u = u_1$ и $P_2 u = u_2$ — искомые проекторы.

Из оценки решения задачи Дирихле с $f = 0$ в п. 11.1 видно, что P_2 — непрерывный проектор. Значит, и P_1 непрерывен. □

Формулу $H^1(\Omega) = H_1 \dotplus H_2$ будем называть *разложением Вейля* пространства $H^1(\Omega)$, отвечающим оператору L, а формулу $u = u_1 + u_2$, где $u_j \in H_j$, разложением Вейля функции u, отвечающим этому оператору.

Замечания и следствия.

11.2b. Пространство $H_1 = \widetilde{H}^1(\Omega)$ не зависит от L (хотя P_1, конечно, зависит от L). Пространство H_2 зависит от L, и мы будем писать $H_2(L)$. Но решения однородной системы $Lu = 0$ параметризуются данными Дирихле, составляющими пространство $H^{1/2}(\Gamma)$. Оно уже не зависит от L.

11.2c. Если форма $\Phi_\Omega(u, u)$ сильно коэрцитивна на $H^1(\Omega)$, то форма $\Phi_\Omega(u, v)$ — общий вид непрерывного антилинейного функционала над $v \in H^1(\Omega)$. Если при этом оператор L формально самосопряженный, то $\Phi_\Omega(u, v)$ можно принять за скалярное произведение в $H^1(\Omega)$. Из формулы Грина видно, что при $u \in H_2$, $v \in H_1$ форма $\Phi_\Omega(u, v)$ равна нулю, так что H_1 и H_2 ортогональны относительно этого скалярного произведения, а P_1, P_2 — ортопроекторы. Но и в общем случае пространства H_1 и H_2 в разложении, отвечающем оператору L, «ортогональны» в том смысле, что из двух форм $\Phi_\Omega(u, v)$ и $\Phi_\Omega(v, u)$ первая равна 0 при $v \in H_1$, $u \in H_2$.

11.2d. Теперь видно, что априорная оценка (11.1.36) является двусторонней. Действительно, при $u = u_1 + u_2$, $u_j \in H_j$, оценки для норм функций u_j двусторонние, а норма функции u эквивалентна сумме норм функций u_j. Этим завершено доказательство теоремы 11.1.4.

11.2e. Подставим в форму $\Phi_\Omega(u, v)$ разложение Вейля $u = u_1 + u_2$, отвечающее оператору L, и разложение Вейля $v = v_1 + v_2$, отвечающее оператору $\widetilde{L}$. Мы сейчас предполагаем, что операторы L и $\widetilde{L}$ определены на всех функциях из $H^1(\Omega)$. Здесь $u_1^+ = v_1^+ = 0$. Однако *нулевой функционал Lu_2 на H_1 договоримся считать продолженным* *нулем на дополнительное пространство* $H_2(\widetilde{L})$:

$$(Lu_2, v_2)_\Omega = 0. \tag{11.2.2}$$

Это отвечает традиции, см. начало подпункта 11.1е. *В частности, мы предлагаем не включать в* Lu_2 *слагаемое, сосредоточенное на границе.* Аналогично поступим в отношении оператора $\widetilde{L}$: будем считать, что $(u_2, \widetilde{L}v_2) = 0$.

Мы получим

$$\Phi_\Omega(u, v) = \sum_{i,j=1}^{2} \Phi_\Omega(u_i, v_j),$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_\Omega(u_1, v_1) &= (Lu_1, v_1)_\Omega, \\
\Phi_\Omega(u_2, v_1) &= (Lu_2, v_1)_\Omega + (T^+u_2, v_1^+)_\Gamma = 0, \\
\Phi_\Omega(u_1, v_2) &= (Lu_1, v_2)_\Omega + (T^+u_1, v_2^+)_\Gamma = \\
&= (u_1, \widetilde{L}v_2)_\Omega + (u_1^+, \widetilde{T}^+v_2)_\Gamma = 0, \\
\Phi_\Omega(u_2, v_2) &= (T^+u_2, v_2^+)_\Gamma.
\end{aligned}$$

В первой строчке Lu_1 — сужение функционала над $H^1(\Omega)$ на $\widetilde{H}^1(\Omega)$. Таким образом,

$$\Phi_\Omega(u, v) = (Lu_1, v_1)_\Omega + (T^+u_2, v_2^+)_\Gamma. \tag{11.2.3}$$

Эта формула — новое представление для формы слева, в котором $f = Lu_1$ *и* $h = T^+u_2$ *определены однозначно.*

Полученная формула допускает следующую интерпретацию. В первом слагаемом справа $f = Lu_1 = Lu$ — функционал, заданный на $H_1 = \widetilde{H}^1(\Omega)$. На $H_2(\widetilde{L})$ он фактически продолжен нулем. Подпространство таких продолжений в $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ обозначим через $\widetilde{H}_1^{-1}(\Omega)$. Второе слагаемое справа — функционал из $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$, сосредоточенный на границе. Подпространство таких функционалов обозначим через $\widetilde{H}_2^{-1}(\Omega)$.

Предложение 11.2.2. *Имеет место разложение пространства* $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ *в прямую сумму подпространств*:

$$\widetilde{H}^{-1}(\Omega) = \widetilde{H}_1^{-1}(\Omega) \dotplus \widetilde{H}_2^{-1}(\Omega). \tag{11.2.4}$$

Первое подпространство справа изоморфно $H^{-1}(\Omega)$, *и его элементы не содержат слагаемых, сосредоточенных на* Γ. *Второе состоит из функционалов, сосредоточенных на* Γ, *и изоморфно* $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Если не u задается, а ставится полная задача Неймана (11.1.35), то эта задача распадается теперь на две задачи: на задачу Дирихле в Ω для неоднородной системы с правой частью из $H^{-1}(\Omega)$ и однородным граничным условием

$$Lu_1 = f \ \text{ в } \Omega, \quad u_1^+ = 0 \tag{11.2.5}$$

и задачу Неймана в $\overline{\Omega}$ для однородной системы с неоднородным граничным условием

$$Lu_2 = 0 \ \text{ в } \Omega, \quad T^+u_2 = h_2. \tag{11.2.6}$$

Правые части определены здесь однозначно и задаются независимо, причем f естественным образом не содержит слагаемых, сосредоточенных на границе, и однозначно определяется по u внутри области. В первой задаче подразумевается продолжение функционала f нулем на функции v_2, но по существу это наиболее простая задача Дирихле, с которой мы начали в предыдущем пункте.

Когда надо решать полную задачу Неймана, часто сначала вычитают из решения частное решение неоднородного уравнения. В данном же случае разложение Вейля подсказывает *вычесть решение задачи Дирихле* (11.2.5) из полного решения в $H^1(\Omega)$. В этом суть предлагаемого нами «мероприятия».

Посмотрим, *что получается в случае обычной задачи Неймана*. Пусть функции u и v принадлежат $H^2(\Omega)$. При рассматриваемой сейчас обычной постановке функция $f = Lu$ принадлежит $L_2(\Omega)$ и не содержит составляющей с носителем на границе. Она определяет функционал над $H^1(\Omega)$ по обычной L_2-двойственности $(f, v)_\Omega$, он вовсе не продолжается нулем на функции v_2. Функции u и u_1 имеют обычные конормальные производные T^+u и T^+u_1, они входят в первую формулу Грина, см. (11.1.4). При вычитании u_1 из u конормальная производная T^+u_1 вычитается из T^+u. Если функция u_1 найдена, то эту конормальную производную T^+u_1 можно считать известной. Таким образом, $h = T^+u$ и $h_2 = T^+u_2$ разные.

Но мы видели, что

$$(Lu_1, v_2)_\Omega + (T^+u_1, v_2^+)_\Gamma = (u_1, \widetilde{L}v_2)_\Omega + (u_1^+, \widetilde{T}^+v_2)_\Gamma = 0. \tag{11.2.7}$$

Здесь первое равенство получается и из второй формулы Грина (11.1.26). Слагаемые слева не влияют на форму $\Phi_\Omega(u, v)$, а значит, и на решение u полной задачи Неймана. Можно заменить эти слагаемые нулями.

В общем случае удобнее продолжение формы $(Lu_1, v)_\Omega$ нулем. Может оказаться, что даже гладкая функция u_1 не имеет обычной конормальной производной. Действительно, не исключено, что $f = Lu_1$ — обычная функция, растущая к границе так, что интегралы $(f, v_1)_\Omega$ сходятся, а интегралы $(f, v_2)_\Omega$, вообще говоря, расходятся.

Это можно сопоставить с тем обстоятельством, что для функций из $\widetilde{H}^1(\Omega)$ нельзя произвольно задавать граничное условие Неймана: ведь они уже подчинены однородному условию Дирихле. Задача Коши для эллиптических уравнений (в данном случае с заданием условий Дирихле и Неймана) некорректна.

Еще раз повторим, что при задании $u \in H^1(\Omega)$ правая часть f системы определяется только внутри Ω, т. е. как функционал $(f, v)_\Omega$ над $\widetilde{H}^1(\Omega)$. Для определения конормальной производной $h = T^+u$ как функционала $(h, v^+)_\Gamma$ над $H^{1/2}(\Gamma)$ нужно задать форму $\Phi_\Omega(u, v)$ и вычесть из нее форму $(f, v)_\Omega$, продолженную на $H^1(\Omega)$, что можно делать множеством способов. Мы предложили продолжать ее нулем на дополнительное пространство $H_2(\widetilde{L})$ и объяснили выше, почему это разумно и удобно. В частности, конормальная производная нужна тогда только на решениях однородной системы $Lu = 0$ и однозначно определяется, если функционал $(f, v)_\Omega$ на $H^1(\Omega)$ был как-то задан и мы сузим его на $\widetilde{H}^1(\Omega)$, а потом продолжим нулем на дополнительное пространство.

11.2f. Для решений $u = u_1 + u_2$ полной задачи Неймана, представленной в новой форме (11.2.5)—(11.2.6), мы теперь можем вывести двустороннюю оценку.

Предполагаем форму Φ_Ω сильно коэрцитивной на $H^1(\Omega)$. Оценка имеет вид

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_1 \big[\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|h_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \big] \leqslant C_2 \|u\|_{H^1(\Omega)}. \tag{11.2.8}$$

Доказательство неравенств (11.2.8). Решение u запишем в виде $u = u_1 + u_2$, где u_1 — решение уравнения $Lu_1 = f$ в $H_1 = \widetilde{H}^1(\Omega)$. Это решение задачи Дирихле с однородным граничным условием.

Для u_1 мы уже имеем оценки

$$\|u_1\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)} \leqslant C_3 \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant C_4 \|u_1\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}. \tag{11.2.9}$$

Далее,

$$Lu_2 = 0, \quad T^+u_2 = h_2$$

в смысле

$$\Phi_\Omega(u_2, v) = (h_2, v^+)_\Gamma.$$

Полагая $v=u_2$ и используя сильное неравенство Гординга, а также обобщенное неравенство Шварца, получаем

$$\|u_2\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant C_5 \|h_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|u_2^+\|_{H^{1/2}(\Gamma)},$$

откуда

$$\|u_2\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_6 \|h_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \tag{11.2.10}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|h_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant C_7 \sup_{v^+\neq 0} \frac{|(h_2, v^+)_\Gamma|}{\|v^+\|_{H^{1/2}(\Gamma)}} = \\ = C_7 \sup_{v^+\neq 0} \frac{|\Phi_\Omega(u_2, v)|}{\|v^+\|_{H^{1/2}(\Gamma)}} \leqslant C_8 \|u_2\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{11.2.11}$$

Здесь использовано определение v по v^+ при помощи правого обратного оператора к оператору перехода к следу.

Из (11.2.9)—(11.2.11) получаем (11.2.8). □

Резюмируем результаты для задачи Неймана.

Теорема 11.2.3. *Пусть форма Φ_Ω сильно коэрцитивна на $H^1(\Omega)$. Тогда отвечающий задаче Неймана* (11.2.5)—(11.2.6) *оператор $u \to \to (f, h_2)$ осуществляет взаимно однозначное непрерывное отображение пространства $H^1(\Omega)$ на прямое произведение пространств $H^{-1}(\Omega)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$. Он обратим, и справедлива двусторонняя априорная оценка* (11.2.8). *Если есть только коэрцитивность, то этот оператор фредгольмов с нулевым индексом и в среднюю часть оценки добавляется $\|u\|_{L_2(\Omega)}$.*

11.2g. Мы *не исключаем* возможности объединять правую часть системы и конормальную производную в один функционал из $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$, когда это полезно, например, для использования теоремы Лакса—Мильграма.

11.3. Операторы Пуанкаре—Стеклова. Рассмотрим решения однородной системы $Lu=0$. Что это означает, мы знаем из предыдущего пункта: $u \in H_2(L)$, и функционал Lu продолжен нулем на $H_2(\widetilde{L})$.

При условии сильной коэрцитивности формы Φ_Ω на $\widetilde{H}^1(\Omega)$ естественно возникает оператор на этих решениях, переводящий данные Дирихле в данные Неймана:

$$D: u^+ \to T^+u. \tag{11.3.1}$$

Он действует ограниченным образом из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$. При сделанном предположении мы не можем утверждать, что он обратим. (См. пример 2 в п. 11.8.) Но при условии сильной коэрцитивности формы Φ_Ω на $H^1(\Omega)$ на решениях однородной системы естественно определяется также оператор

$$N\colon T^+u \to u^+, \tag{11.3.2}$$

действующий ограниченным образом из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$ и обратный к оператору D, так что в этом случае оба оператора, D и N, обратимы. Их английские названия — Dirichlet-to-Neumann operator и Neumann-to-Dirichlet operator. Мы их будем называть соответственно *оператором Дирихле* и *оператором Неймана*. Оба эти оператора (или какой-нибудь один из них) называют также *операторами Пуанкаре—Стеклова*. В другом контексте мы затрагивали эти операторы в § 7.

Теорема 11.3.1. *При условии сильной коэрцитивности формы Φ_Ω на $H^1(\Omega)$ справедливы неравенства*

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant C_1 \operatorname{Re}(D\varphi, \varphi)_\Gamma, \quad \|\psi\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant C_2 \operatorname{Re}(N\psi, \psi)_\Gamma, \tag{11.3.3}$$

соответственно для $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ и $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Доказательство. Выведем первое неравенство. Пусть u — решение системы $Lu = 0$ с условием Дирихле $u^+ = \varphi$. Запишем формулу Грина в виде

$$\Phi_\Omega(u, u) = (D\varphi, \varphi)_\Gamma. \tag{11.3.4}$$

Используя теорему о следах и сильную коэрцитивность формы на $H^1(\Omega)$, имеем

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant C'\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant C'' \operatorname{Re}\Phi_\Omega(u, u) = C'' \operatorname{Re}(D\varphi, \varphi)_\Gamma.$$

Мы проверили первое утверждение. Чтобы проверить второе, проще всего положить $D\varphi = \psi$. Тогда $\varphi = N\psi$ и

$$\|\psi\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant C'''\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant \widetilde{C} \operatorname{Re}(D\varphi, \varphi)_\Gamma = \widetilde{C} \operatorname{Re}(N\psi, \psi)_\Gamma. \qquad \square$$

Будем говорить, что (11.3.3) — *сильные неравенства коэрцитивности для форм операторов D и N.*

В случае бесконечной гладкости поверхности Γ и коэффициентов в L операторы D и N — это сильно эллиптические псевдодифференциальные операторы на Γ соответственно порядков 1 и -1.

11.4. Смешанная задача. Простейшая смешанная задача ставится следующим образом. Предположим, что граница Γ состоит из двух областей Γ_1 и Γ_2 и их общей границы $\partial\Gamma_j$ — липшицевой поверхности на единицу меньшей размерности $n-2$, связной и без самопересечений. На Γ_1 ставится условие Дирихле, на Γ_2 — условие Неймана. Таким образом, задача имеет вид

$$Lu = f \text{ в } \Omega, \quad u^+ = g \text{ на } \Gamma_1, \quad T^+u = h \text{ на } \Gamma_2. \tag{11.4.1}$$

Здесь

$$g \in H^{1/2}(\Gamma_1), \quad h \in H^{-1/2}(\Gamma_2). \tag{11.4.2}$$

Введем *пространство* $H^1(\Omega; \Gamma_1)$ — (замкнутое) подпространство в $H^1(\Omega)$, состоящее из функций, равных нулю на Γ_1. Примем, что пробные функции v принадлежат этому пространству. Тогда надо считать, что f принадлежит сопряженному пространству

$$\widetilde{H}^{-1}(\Omega; \Gamma_1) := [H^1(\Omega; \Gamma_1)]^* \tag{11.4.3}$$

относительно формы $(f, v)_\Omega$.

Действуя, как в случае задачи Дирихле, предположим сначала, что $g = 0$. Тогда решение u и пробная функция v должны принадлежать $H^1(\Omega; \Gamma_1)$. Формула Грина имеет вид

$$\Phi_\Omega(u, v) = (f, v)_\Omega + (h, v^+)_{\Gamma_2}. \tag{11.4.4}$$

Предположим, что форма Φ_Ω сильно коэрцитивна на $H^1(\Omega; \Gamma_1)$ (это следует из сильной коэрцитивности на $H^1(\Omega)$). Тогда задача однозначно разрешима в силу теоремы Лакса—Мильграма.

Пусть теперь $g \neq 0$. Действуем в основном как в случае задачи Дирихле с неоднородным граничным условием. Сначала продолжим g до функции из $H^{1/2}(\Gamma)$. Затем возьмем функцию $u_0 \in H^1(\Omega)$ с граничным значением g. Теперь определим $f_0 = Lu_0 \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$ формулой

$$(f_0, v)_\Omega = \Phi_\Omega(u_0, v), \quad v \in H^1(\Omega; \Gamma_1), \tag{11.4.5}$$

принимая тем самым, что $T^+u_0 = 0$ на Γ_2. Решением нашей задачи *назовем* функцию $u = u_0 + u_1 \in H^1(\Omega)$, где $u_1 \in H^1(\Omega; \Gamma_1)$ — решение задачи

$$Lu_1 = f - f_0 \text{ в } \Omega, \quad u_1^+ = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad T^+u_1 = h \text{ на } \Gamma_2, \tag{11.4.6}$$

т. е.

$$\Phi_\Omega(u_1, v) = (f - f_0, v)_\Omega + (h, v^+)_{\Gamma_2}, \quad v \in H^1(\Omega; \Gamma_1). \tag{11.4.7}$$

В силу предположенной сильной коэрцитивности формы Φ_Ω на $H^1(\Omega;\Gamma_1)$, решение u_1 существует и единственно. Как в случае задачи Дирихле, проверяется независимость u от выбора u_0, включая способ продолжения функции g.

Таким образом, получена

Теорема 11.4.1. *Пусть форма $\Phi_\Omega(u,v)$ сильно коэрцитивна на $H^1(\Omega;\Gamma_1)$. Тогда поставленная выше смешанная задача имеет одно и только одно решение.*

Задачи Дирихле и Неймана можно считать частными случаями смешанной задачи, и в этих случаях все согласуется со сказанным в предыдущих пунктах.

Теперь мы покажем, что смешанную задачу можно свести как к задаче Дирихле, так и к задаче Неймана при помощи решения некоторых уравнений на части границы. Для этого надо ввести аналоги операторов N и D на части границы.

Введем оператор

$$D_1\varphi = (D\varphi)|_{\Gamma_1} \tag{11.4.8}$$

из $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$ в $H^{-1/2}(\Gamma_1)$. Он получен из оператора D сужением области определения на подпространство $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$ и сужением получающихся функций $D\varphi$ на Γ_1. Очевидно, что он корректно определен и ограничен.

Теорема 11.4.2. *При условии сильной коэрцитивности формы Φ_Ω на $H^1(\Omega)$ для формы оператора D_1 справедливо сильное неравенство коэрцитивности*

$$\|\varphi\|^2_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)} \leqslant C\,\mathrm{Re}(D_1\varphi,\varphi)_{\Gamma_1} \quad (\varphi\in\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)) \tag{11.4.9}$$

и этот оператор обратим.

Доказательство. Неравенство (11.4.9) следует из первого неравенства в (11.3.3): оператор D_1 наследует его. Функции в форме справа в (11.4.9) до и после запятой находятся в дуальных пространствах. Обратимость оператора D_1 следует из теоремы Лакса—Мильграма, применяемой к форме $(D_1\varphi_1,\varphi_1)_{\Gamma_1}$ и уравнению $D_1\varphi_1 = \psi_1$. □

Аналогично вводится и обладает аналогичными свойствами оператор D_2.

Введем оператор

$$N_1\psi = (N\psi)|_{\Gamma_1} \tag{11.4.10}$$

из $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$ в $H^{1/2}(\Gamma_1)$. Он получен из оператора N сужением области определения на подпространство $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$ и сужением получающихся функций $N\psi$ на Γ_1. Очевидно, что он тоже корректно определен и ограничен.

Теорема 11.4.3. *При условии сильной коэрцитивности формы Φ_Ω на $H^1(\Omega)$ для формы оператора N_1 справедливо сильное неравенство коэрцитивности*

$$\|\psi\|^2_{\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)} \leqslant C\,\mathrm{Re}(N_1\psi, \psi)_{\Gamma_1} \quad (\psi \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)) \tag{11.4.11}$$

и этот оператор обратим.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы. Неравенство (11.4.11) следует из второго неравенства в (11.3.3). $\square$

Оператор N_2 вводится аналогично и обладает аналогичными свойствами.

Отметим, что оператор N_1 и оператор D_1^{-1} не совпадают: у них разные области определения и разные области значений. Аналогично не совпадают операторы N_2 и D_2^{-1}.

Перейдем к процедурам сведе́ния смешанной задачи к задачам Дирихле и Неймана.

Будем считать, что $f=0$. (Принимаем, что мы умеем строить решения уравнения $Lu=f$, ср. с п. 12.1 ниже.)

Продолжим правую часть g граничного условия на Γ_1 до функции из $H^{1/2}(\Gamma)$, сохраняя для нее обозначение g. Теперь для решения u нашей задачи мы имеем $u^+=g+g_1$, где $g_1\in\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_2)$.

С другой стороны,

$$h = (D(g+g_1))|_{\Gamma_2}.$$

Получаем уравнение для g_1:

$$D_2 g_1 = h_1, \tag{11.4.12}$$

где $h_1=h-(Dg)|_{\Gamma_2}$ — известная функция. Но про оператор D_2 мы знаем, что он обратим. Если найдем g_1, то смешанная задача сведется к задаче Дирихле.

Теперь покажем, как смешанная задача сводится к задаче Неймана. Это в общем делается аналогично. Продолжим h до элемента из $H^{-1/2}(\Gamma)$. После этого $T^+u=h+h_2$, где $h_2\in\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$. Для h_2 получим уравнение

$$N_1 h_2 = g_2, \tag{11.4.13}$$

где $g_2 = g - (Nh)|_{\Gamma_1}$ — известная функция. Оператор N_1 тоже обратим. Если решим это уравнение, то смешанная задача сведется к задаче Неймана.

В следующем параграфе будут объяснены способы сведéния задач Дирихле и Неймана к уравнениям на границе Γ при помощи операторов типа потенциала. Для смешанной задачи тем самым будет показано, что она тоже сводится к уравнениям на границе.

Укажем теперь аналог разложения Вейля для пространства $H^1(\Omega; \Gamma_1)$.

Предложение 11.4.4. *В предположении однозначной разрешимости задачи Дирихле пространство $H^1(\Omega; \Gamma_1)$ является прямой суммой подпространства $\widetilde{H}^1(\Omega)$ и подпространства решений задачи Дирихле для однородной системы $Lu = 0$ с данными Дирихле, равными нулю на Γ_1. Последнее подпространство изоморфно $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_2)$.*

Проверка предоставляется читателю.

11.5. Соотношения дуальности на Г. Из второй формулы Грина (11.1.26) вытекают соотношения

$$(D\varphi_1, \varphi_2)_\Gamma = (\varphi_1, \widetilde{D}\varphi_2)_\Gamma, \quad (N\psi_1, \psi_2)_\Gamma = (\psi_1, \widetilde{N}\psi_2)_\Gamma. \tag{11.5.1}$$

Здесь и дальше отвечающие $\widetilde{L}$ операторы на границе обозначены волной. Функции φ_j и ψ_j принадлежат соответственно $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Как следствие

$$(D_1\varphi_1, \varphi_2)_{\Gamma_1} = (\varphi_1, \widetilde{D}_1\varphi_2)_{\Gamma_1}, \quad (N_1\psi_1, \psi_2)_{\Gamma_1} = (\psi_1, \widetilde{N}_1\psi_2)_{\Gamma_1}. \tag{11.5.2}$$

Здесь в первом соотношении $\varphi_j \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$, во втором $\psi_j \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$.

Смысл формул (11.5.1) и (11.5.2) состоит в том, что в каждом из этих четырех случаев операторы, отвечающие формально сопряженным системам, сопряжены относительно продолжения скалярного произведения в $L_2(\Gamma)$ или $L_2(\Gamma_1)$.

11.6. Спектральные задачи. В этом пункте мы кратко рассмотрим следующие спектральные задачи.

1°. Спектральная задача Дирихле

$$Lu = \lambda u \ \text{ в } \Omega, \quad u^+ = 0 \ \text{ на } \Gamma. \tag{11.6.1}$$

2°. Спектральная задача Неймана

$$Lu = \lambda u \ \text{ в } \Omega, \quad T^+u = 0 \ \text{ на } \Gamma. \tag{11.6.2}$$

3°. Смешанная спектральная задача

$$Lu = \lambda u \text{ в } \Omega, \quad u^+ = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad T^+u = 0 \text{ на } \Gamma_2. \tag{11.6.3}$$

Это задачи со спектральным параметром в системе. Четвертая задача содержит спектральный параметр в граничном условии:

4°. Задача Пуанкаре—Стеклова

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega, \quad T^+u = \lambda u^+ \text{ на } \Gamma. \tag{11.6.4}$$

Пятая и шестая задачи — это тоже смешанные задачи, аналоги задачи Пуанкаре—Стеклова со спектральным параметром на части границы:

$$5^\circ. \quad Lu = 0 \text{ в } \Omega, \quad T^+u = \lambda u^+ \text{ на } \Gamma_1, \quad u^+ = 0 \text{ на } \Gamma_2. \tag{11.6.5}$$

$$6^\circ. \quad Lu = 0 \text{ в } \Omega, \quad T^+u = \lambda u^+ \text{ на } \Gamma_1, \quad T^+u = 0 \text{ на } \Gamma_2. \tag{11.6.6}$$

Еще четыре спектральные задачи будут рассмотрены в п. 12.9.

Следует отметить, что если граница Γ и коэффициенты оператора L гладкие, то, по крайней мере, задачи 1°, 2° и 4° при условии их эллиптичности можно рассматривать в рамках общей теории, изложенной в § 7. Получаются более сильные результаты. В частности, собственные и корневые функции являются гладкими (в $\overline{\Omega}$ или на Γ), и известны более сильные оценки остаточных членов в асимптотиках собственных значений. А здесь мы остановимся на том, что удается выяснить при липшицевой границе и коэффициентах малой гладкости. Но для простоты считаем $a_{j,k}$ и b_j липшицевыми. Все факты сообщаются без доказательства.

Всюду в этом пункте предполагается выполненным сильное неравенство Гординга (11.1.21). Как и в п. 17.3, собственные значения неограниченных положительных операторов с компактной резольвентой нумеруются натуральными числами с учетом кратностей в порядке неубывания, собственные значения несамосопряженных операторов с компактной резольвентой — также с учетом кратностей в порядке неубывания модулей. Материал п. 17.3 можно использовать для справок.

Начнем с первой задачи. Отвечающий ей оператор мы обозначаем через $\mathcal{L}_D$. В общей теории, при добавочных предположениях о гладкости, его обычно рассматривают как неограниченный оператор в $L_2(\Omega)$ с областью определения $H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$. Мы об этом говорили в п. 7.4. Но сейчас такая точка зрения неудобна, потому что точного описания области определения этого оператора мы не имеем. Будем рассматривать его как обратимый оператор из $\widetilde{H}^1(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega)$. Выделим три случая.

1. Предположим сначала, что L — формально самосопряженный оператор. Тогда из второй формулы Грина вытекает, что

$$(\mathcal{L}_D u, v)_\Omega = (u, \mathcal{L}_D v)_\Omega \quad (u, v \in \widetilde{H}^1(\Omega)) \tag{11.6.7}$$

и, следовательно,

$$(\mathcal{L}_D^{-1} f, g)_\Omega = (f, \mathcal{L}_D^{-1} g)_\Omega \quad (f, g \in H^{-1}(\Omega)). \tag{11.6.8}$$

Это позволяет ввести в $H^{-1}(\Omega)$ новое скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle_{H^{-1}(\Omega)} = (\mathcal{L}_D^{-1} f, g)_\Omega. \tag{11.6.9}$$

Здесь используется двойственность между пространствами $\widetilde{H}^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$. Оператор $\mathcal{L}_D^{-1}$ оказывается самосопряженным компактным оператором в $H^{-1}(\Omega)$ со скалярным произведением (11.6.9), а $\mathcal{L}_D$ — самосопряженным оператором с компактной резольвентой в этом пространстве. Напомним, что $\widetilde{H}^1(\Omega)$ отождествляется с $\mathring{H}^1(\Omega)$ и последнее пространство содержится в $H^{-1}(\Omega)$, поэтому спектральная задача имеет смысл. Спектр оператора $\mathcal{L}_D$ дискретен и состоит из положительных собственных значений, так что этот оператор положителен, а его собственные функции принадлежат $\widetilde{H}^1(\Omega)$, где они, как и в $H^{-1}(\Omega)$, образуют ортогональный базис — относительно скалярного произведения

$$\langle u, v \rangle_{\widetilde{H}^1(\Omega)} = (\mathcal{L}_D u, v)_\Omega, \tag{11.6.10}$$

совпадающего с $\Phi_\Omega(u, v)$ в силу первой формулы Грина. Собственные функции принадлежат также промежуточным пространствам и там тоже образуют ортогональный базис относительно скалярных произведений, которые вводятся при помощи степеней оператора $\mathcal{L}_D$ с использованием его положительности. Как мы увидим в п. 11.7 и § 16, шкалу этих пространств можно несколько расширить влево и вправо за точки промежутка $[-1, 1]$ для индекса, а именно на интервал $(-3/2, 3/2)$, и там тоже собственные функции образуют ортогональный базис.

Для собственных значений справедлива асимптотическая формула

$$\lambda_j(\mathcal{L}_D) = c_L j^{2/n} + O(j^{3/2n}), \tag{11.6.11}$$

где c_L — положительная постоянная. Оценка остатка здесь выводится из результатов Метивье [270]. В более специальных случаях в липшицевых областях выводится более сильная оценка остатка, чем здесь, см. [279]. Но и оценка (11.6.11) достаточно интересна. Для гладких скалярных задач в общем случае имеет место оценка $O(j^{1/n})$.

2. Пусть теперь оператор L не является формально самосопряженным, но имеет формально самосопряженную старшую часть. Рассмотрим тогда оператор $\frac{1}{2}(L+\widetilde{L})$. Отвечающий задаче Дирихле для него оператор обозначим через $\mathcal{L}_{D,0}$. Можно предположить, что он тоже обратим. Скалярное произведение в $H^{-1}(\Omega)$ введем формулой вида (11.6.9), но с оператором $\mathcal{L}_{D,0}$ вместо $\mathcal{L}_D$. Оператор $\mathcal{L}_D$, отвечающий задаче Дирихле для L, оказывается тогда слабым возмущением самосопряженного положительного оператора $\mathcal{L}_{D,0}$:

$$\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_{D,0} + \mathcal{L}_{D,1}, \quad \text{где } \|\mathcal{L}_{D,1}\mathcal{L}_{D,0}^{-q}\| < \infty. \tag{11.6.12}$$

Здесь $q = 1/2$ в общем случае и $q = 0$, если $\mathcal{L}_{D,1}$ соответствует оператору нулевого порядка. Получаются следующие результаты.

Спектр оператора $\mathcal{L}_D$ дискретен, и его собственные значения лежат в области вида

$$\{\lambda = \sigma + i\tau : \sigma > 0,\ |\tau| < C\sigma^q\}, \tag{11.6.13}$$

$C > 0$, по крайней мере с некоторого номера; при этом собственных значений нет в замкнутой левой полуплоскости. Собственные значения имеют асимптотику

$$\lambda_j = c_L j^{2/n} + o(j^{2/n}) \tag{11.6.14}$$

с тем же коэффициентом c_L. На уточнении оценки остаточного члена здесь не останавливаемся. Корневые функции оператора $\mathcal{L}_D$ в $H^{-1}(\Omega)$ принадлежат $\widetilde{H}^1(\Omega)$ и всем промежуточным пространствам и образуют полное множество в каждом из них.

3. Наконец, рассмотрим случай, когда нет никакой самосопряженности. Оператор $\mathcal{L}_D$ остается оператором в $H^{-1}(\Omega)$ с областью определения $\widetilde{H}^1(\Omega)$ и компактной резольвентой. Предположим, что значения квадратичной формы $\Phi_\Omega(u,u)$ содержатся в угле

$$\Theta_\theta = \{\lambda : |\arg\lambda| \leqslant \theta\}. \tag{11.6.15}$$

Здесь всегда $\theta < \pi/2$, так как в силу условия (сильной) коэрцитивности

$$|\operatorname{Im}\Phi_\Omega(u,u)| \leqslant C\operatorname{Re}\Phi_\Omega(u,u). \tag{11.6.16}$$

Все собственные значения оператора $\mathcal{L}_D$ содержатся в этом угле. Вне угла $\Theta_{\theta+\varepsilon}$ со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$ справедлива оптимальная оценка резольвенты

$$\|(\mathcal{L}_D - \lambda I)^{-1}\| \leqslant C(1+|\lambda|)^{-1}. \tag{11.6.17}$$

(В предыдущем случае такая оценка верна при любом ε вне Θ_ε при больших $|\lambda|$.)

Полноту корневых функций в крайних и промежуточных пространствах можно гарантировать, если

$$\theta < \pi/n. \tag{11.6.18}$$

Для задачи Неймана 2° все основные результаты сохраняются, только надо изменить пространства: отвечающий ей оператор $\mathcal{L}_N$ действует ограниченным образом из $H^1(\Omega)$ в $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$, и, например, в случае формальной самосопряженности (в $\overline{\Omega}$, см. п. 11.1c) мы вводим в последнем пространстве скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle_{\widetilde{H}^{-1}(\Omega)} = (\mathcal{L}_N^{-1} f, g)_\Omega. \tag{11.6.19}$$

Постоянная c_L в асимптотике остается прежней, причем сохраняет силу результат Метивье.

Поясним, что соглашение, предложенное в п. 11.2, здесь неудобно. Но собственные и корневые функции принадлежат $H^1(\Omega)$. В отношении работы Метивье отметим, что в ней рассматриваются вариационные спектральные задачи для оператора A, определяемого коэрцитивной формой $\Phi_\Omega(u, v)$ в $L_2(\Omega)$:

$$\Phi(u, v) = (Au, v)_{L_2(\Omega)} \quad (u \in D(A), v \in V),$$

где область определения V формы может быть подпространством в $H^1(\Omega)$, содержащим $\mathring{H}^1(\Omega)$. Ср. с подпунктом 3 в п. 11.9 ниже. В обозначениях п. 11.10 ниже это оператор A_2.

Перейдем к смешанной спектральной задаче 3°. Здесь картина аналогична, только отвечающий задаче оператор действует из $H^1(\Omega; \Gamma_1)$ в $\widetilde{H}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$. Обозначим его через $\mathcal{L}_m$ (m — mixed). Предполагая его обратимым, мы снова можем рассмотреть три случая. В первом из них, когда оператор L формально самосопряженный, мы в $\widetilde{H}^{-1}(\Omega; \Gamma_1)$ вводим скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle_{\widetilde{H}^{-1}(\Omega;\Gamma_1)} = (\mathcal{L}_m^{-1} f, g)_\Omega. \tag{11.6.20}$$

Характер результатов остается прежним, включая асимптотику собственных значений с той же постоянной c_L.

Теперь рассмотрим задачу Пуанкаре—Стеклова 4°. Ясно, что на *собственных* функциях она эквивалентна уравнению

$$D\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi = u^+. \tag{11.6.21}$$

Пусть оператор L является формально самосопряженным в $\overline{\Omega}$. Тогда (см. п. 11.5)

$$(D\varphi_1, \varphi_2)_\Gamma = (\varphi_1, D\varphi_2)_\Gamma \quad (\varphi_1, \varphi_2 \in H^{1/2}(\Gamma)) \tag{11.6.22}$$

и

$$(N\psi_1, \psi_2)_\Gamma = (\psi_1, N\psi_2)_\Gamma \quad (\psi_1, \psi_2 \in H^{-1/2}(\Gamma)). \tag{11.6.23}$$

Последнее позволяет ввести в $H^{-1/2}(\Gamma)$ новое скалярное произведение

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)} = (N\psi_1, \psi_2)_\Gamma. \tag{11.6.24}$$

Теперь оператор Неймана N — компактный самосопряженный оператор в $H^{-1/2}(\Gamma)$, а обратный к нему оператор Дирихле D — самосопряженный неограниченный оператор с компактной резольвентой и дискретным спектром, его область определения — пространство $H^{1/2}(\Gamma)$. Собственные функции принадлежат $H^{1/2}(\Gamma)$ и промежуточным пространствам. Собственные значения обоих операторов положительны, собственные значения оператора D стремятся к $+\infty$.

В случае бесконечной гладкости поверхности Γ и коэффициентов в L для собственных значений из общих результатов спектральной теории эллиптических псевдодифференциальных операторов получается асимптотика

$$\lambda_j(D) = c' j^{1/(n-1)} + o(j^{1/(n-1)}). \tag{11.6.25}$$

По крайней мере, в скалярном случае ($d = 1$) для остаточного члена получается оценка $O(1)$.

Определение ([111])**.** Липшицева поверхность Γ называется *почти гладкой,* если она является бесконечно гладкой вне замкнутого подмножества нулевой меры.

Ясно, что в этот класс поверхностей входит обширное множество, например, двумерных поверхностей в $\mathbb{R}^3$ с «обозримыми» особенностями: выпуклые криволинейные многогранники, конусы, цилиндры и т. п., бесконечно гладкие вне своих особенностей типа ребер, вершин и т. п.

В [109] показано, что если поверхность Γ почти гладкая, то для собственных значений $\lambda_j(D)$ тоже справедлива асимптотическая формула (11.6.25).

Пусть теперь только главная часть оператора L является формально самосопряженной. Тогда и N, и D можно рассматривать как слабые возмущения самосопряженных операторов в $H^{-1/2}(\Gamma)$, обозначим их через N_0 и D_0; последние отвечают формально самосопряженному оператору в Ω с той же главной частью. Скалярное произведение вводится при помощи оператора N_0:

$$\langle\psi_1, \psi_2\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)} = (N_0\psi_1, \psi_2)_\Gamma. \tag{11.6.26}$$

Соответствующее q (ср. с (11.6.12)) меньше 1, но его точное значение мы выяснять не будем. Результаты состоят в следующем. Корневые функции принадлежат $H^{1/2}(\Gamma)$ и промежуточным пространствам и образуют там полные системы. Собственные значения оператора D лежат в сколь угодно узком угле Θ_ε с некоторого номера, зависящего от ε, и имеют ту же асимптотику. Их нет в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Вне угла Θ_ε при больших $|\lambda|$ справедлива оптимальная оценка для резольвенты оператора D:

$$\|(D - \lambda I)^{-1}\| \leqslant C|\lambda|^{-1}. \tag{11.6.27}$$

Если же нет никакой самосопряженности, то пусть Θ_θ — угол, содержащий все значения квадратичной формы $\Phi_\Omega(u, u)$ при $u \in$ $\in H^1(\Omega)$. Все собственные значения оператора N (и оператора D) содержатся в Θ_θ. Вне угла $\Theta_{\theta+\varepsilon}$ со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$ справедлива та же оптимальная оценка резольвенты (11.6.27). Корневые функции снова принадлежат $H^{1/2}(\Gamma)$ и промежуточным пространствам. Их полноту в этих пространствах можно гарантировать при $2(n-1)\theta < \pi$.

Перейдем к задачам 5° и 6°.

В задаче 5° функции $\varphi = u^+$ равны нулю на Γ_2, и на *собственных* функциях φ задача эквивалентна уравнению $D_1\varphi = \lambda\varphi$. Основное гильбертово пространство — это $H^{-1/2}(\Gamma_1)$, и если оператор L формально самосопряженный, то D_1 — самосопряженный оператор в этом пространстве со скалярным произведением

$$\langle\psi_1, \psi_2\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} = (D_1^{-1}\psi_1, \psi_2)_{\Gamma_1}, \tag{11.6.28}$$

имеющий область определения $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$.

В задаче 6° функции $\psi = T^+u$ равны нулю на Γ_2. На *собственных* функциях задача эквивалентна уравнению $\psi = \lambda N_1\psi$. Основное гильбертово пространство для нее — это $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$. В нем N_1 — компактный оператор с областью значений $H^{1/2}(\Gamma_1)$. Если оператор L

формально самосопряженный, то N_1 — самосопряженный оператор в пространстве $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$ со скалярным произведением

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)} = (N_1 \psi_1, \psi_2)_{\Gamma_1}. \tag{11.6.29}$$

Спектральные свойства операторов N_1 и D_1^{-1} в остальном аналогичны спектральным свойствам оператора N. Отметим, что в спектральной асимптотике для N_1 и D_1^{-1} коэффициенты одинаковы, хотя собственные функции и собственные значения разные.

Пример. Рассмотрим уравнение Лапласа в квадрате

$$\{(x, y) \colon 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}.$$

Пусть Γ_1 — его левая сторона, а Γ_2 состоит из трех других сторон. Задача 5° имеет решения $\operatorname{sh} j(\pi - x) \sin jy$ $(j = 1, 2, \ldots)$, а задача 6° — решения $\operatorname{ch} j(\pi - x) \cos jy$ $(j = 0, 1, \ldots)$. Собственные функции оператора D_1^{-1} — это $\sin jy$, а собственные функции оператора N_1 — это $\cos jy$. Собственные значения соответственно равны $j^{-1} \operatorname{th}(j\pi)$ и $j^{-1} \operatorname{cth}(j\pi)$. Они разные в двух задачах, но их асимптотика одинакова.

11.7. Основные граничные задачи в более общих пространствах H^s. Не выходя за рамки пространств H^s, можно существенно обобщить сначала формулу Грина (11.1.4), а затем постановки основных граничных задач. Коэффициенты $a_{j,k}(x)$ и $b_j(x)$ сейчас будем предполагать принадлежащими $C^{1/2}(\overline{\Omega})$, коэффициент $c(x)$ — ограниченным и измеримым. Но там, где нужен формально сопряженный оператор, считаем b_j липшицевыми.

Предложение 11.7.1. *Форма Φ_Ω ограничена на прямом произведении пространств $H^{1+s}(\Omega)$ и $H^{1-s}(\Omega)$, $|s| < 1/2$:*

$$|\Phi_\Omega(u, v)| \leqslant C \|u\|_{H^{1+s}(\Omega)} \|v\|_{H^{1-s}(\Omega)}. \tag{11.7.1}$$

Доказательство. Пусть сначала Φ_Ω состоит только из старших членов. Если $u \in H^{1+s}(\Omega)$ и $v \in H^{1-s}(\Omega)$, то $\partial_k u \in H^s(\Omega)$, $a_{j,k}\partial_k u \in H^s(\Omega)$ и $\partial_j v \in H^{-s}(\Omega)$. При $|s| < 1/2$ последние пространства совпадают с соответствующими пространствами $\widetilde{H}^{\pm s}(\Omega)$ и двойственны относительно продолжения скалярного произведения в $L_2(\Omega)$ на их прямое произведение. Младший член рассматриваем как произведение функций из $L_2(\Omega)$. Средние члены — тоже, если $s > 0$. Если же $s < 0$, то пользуемся тем, что $b_j \partial_j u \in H^s(\Omega)$, $v \in \widetilde{H}^{-s}(\Omega)$. Мы видим, что получается неравенство (11.7.1). □

Замечание. Отметим, что предположения о гладкости коэффициентов можно ослабить, если зафиксировать интересующее нас s. Тогда достаточно, чтобы $a_{j,k}$ и b_j были мультипликаторами в $H^s(\Omega)$. Кроме того, как видно из доказательства, при $s>0$ достаточно считать коэффициенты b_j ограниченными и измеримыми, если не нужна сопряженная задача.

Это замечание следует иметь в виду и в дальнейшем.

Теперь запишем формулу Грина:

$$(Lu,v)_\Omega = \Phi_\Omega(u,v) - (T^+u, v^+)_\Gamma. \tag{11.7.2}$$

Здесь $u \in H^{1+s}(\Omega)$, $v \in H^{1-s}(\Omega)$, $|s| < 1/2$. Мы будем сначала считать, что $Lu \in \widetilde{H}^{-1+s}(\Omega)$, тогда левая часть имеет смысл. Далее, $v^+ \in H^{1/2-s}(\Gamma)$, и ограничение на s определяется условиями применимости теоремы о следе. Конормальную производную, как и раньше, мы определяем формулой Грина.

Предложение 11.7.2. *При* $|s|<1/2$ *выполняется неравенство*

$$\|T^+u\|_{H^{-1/2+s}(\Gamma)} \leqslant C\left[\|u\|_{H^{1+s}(\Omega)} + \|Lu\|_{\widetilde{H}^{-1+s}(\Omega)}\right]. \tag{11.7.3}$$

Доказательство. Имеем

$$|(T^+u,v^+)_\Gamma| \leqslant |(Lu,v)_\Omega| + |\Phi_\Omega(u,v)| \leqslant \\ \leqslant C_2\left[\|Lu\|_{\widetilde{H}^{-1+s}(\Omega)} + \|u\|_{H^{1+s}(\Omega)}\right]\|v\|_{H^{1-s}(\Omega)}.$$

Отсюда следует (11.7.3), так как

$$\|T^+u\|_{H^{-1/2+s}(\Gamma)} \leqslant C_3 \sup_{v^+\neq 0} \frac{|(T^+u,v^+)_\Gamma|}{\|v^+\|_{H^{1/2-s}(\Gamma)}}$$

и здесь норма в знаменателе оценивается снизу через $\|v\|_{H^{1-s}(\Omega)}$ при надлежащем выборе v по v^+. □

Задачи Дирихле и Неймана с однородными граничными условиями обобщаются теперь следующим образом. Они по-прежнему определяются формулой Грина без граничного слагаемого. Но теперь в задаче Дирихле

$$u \in \widetilde{H}^{1+s}(\Omega), \quad Lu = f \in H^{-1+s}(\Omega), \quad v \in \widetilde{H}^{1-s}(\Omega).$$

В задаче Неймана

$$u \in H^{1+s}(\Omega), \quad Lu = f \in \widetilde{H}^{-1+s}(\Omega), \quad v \in H^{1-s}(\Omega).$$

При этом $|s|<1/2$, что, как уже сказано, диктуется теоремой о следе. В обеих задачах f и v принадлежат сопряженным пространствам.

Вопрос о том, при каких s эти задачи однозначно разрешимы, уже не решается при помощи теоремы Лакса—Мильграма, так как при $s \neq 0$ решение и правая часть не принадлежат взаимно сопряженным пространствам. Обсуждение будет проведено в § 16 с использованием некоторых результатов теории интерполяции (§ 13), причем там мы включим в рассмотрение и более общие пространства, которые введем в § 14. Сейчас мы сформулируем результаты, относящиеся к пространствам H^s, без доказательства. (Пока этих результатов нет, рано обсуждать обобщение нашего соглашения, принятого в п. 11.2.) Утверждения о системах с формально самосопряженной главной частью получатся в предположении, что $a_{j,k}(x)$ и b_j принадлежат $C^{0,1}(\overline{\Omega})$. Но если удовлетвориться результатами для положительных s, то b_j можно считать ограниченными и измеримыми.

В формулировке результата для матричной задачи Неймана понадобится *дополнительное условие*, состоящее в неотрицательности подынтегрального выражения в форме $\Phi_\Omega(u, u)$:

$$\sum a_{j,k}^{r,s}(x)\zeta_k^s\overline{\zeta_j^r} \geqslant 0. \tag{11.7.4}$$

Оно накладывается на точки x из окрестности границы. Заметим, что оно следует, например, из нашего условия (11.1.17), достаточного для коэрцитивности формы Φ_Ω на $H^1(\Omega)$, и по этой причине не является слишком обременительным.

Теорема 11.7.3. 1. *Пусть форма Φ_Ω сильно коэрцитивна на $\widetilde{H}^1(\Omega)$. Тогда существует такое $\varepsilon = \varepsilon(L) \in (0, 1/2]$, что отвечающий задаче Дирихле с однородными граничными условиями оператор*

$$\mathcal{L}_D : \widetilde{H}^{1+s}(\Omega) \to H^{-1+s}(\Omega)$$

обратим при $|s| < \varepsilon$. Если оператор L имеет формально самосопряженную главную часть, то $\varepsilon(L) = 1/2$. Если есть только сильная эллиптичность, но нет сильной коэрцитивности, то оператор $\mathcal{L}_D$ фредгольмов при $|s| < \varepsilon$, причем размерности ядра и коядра этого оператора совпадают и не зависят от s.

2. *Пусть форма Φ_Ω сильно коэрцитивна на $H^1(\Omega)$. Тогда существует такое $\varepsilon = \varepsilon(L) \in (0, 1/2]$, что отвечающий задаче Неймана с однородными граничными условиями оператор*

$$\mathcal{L}_N : H^{1+s}(\Omega) \to \widetilde{H}^{-1+s}(\Omega)$$

обратим при $|s| < \varepsilon$. Если оператор L имеет формально самосопряженную главную часть и в матричном случае выполнено дополнительное условие (11.7.4) *в окрестности границы, то $\varepsilon(L) = 1/2$. Если* *есть только коэрцитивность, но нет сильной коэрцитивности, то оператор $\mathcal{L}_N$ фредгольмов при $|s|<\varepsilon$, причем размерности ядра и коядра этого оператора совпадают и не зависят от s.*

Числа $\varepsilon(L)$ для задач Дирихле и Неймана, если они есть для обеих задач, мы для простоты обычно будем считать одинаковыми (приравнивая их меньшему из них). Кроме того, будем считать, что $\varepsilon(L)=\varepsilon(\widetilde{L})$.

Утверждения о фредгольмовости следуют из утверждений об обратимости для оператора $L+\tau I$ вместо L с достаточно большим τ. Утверждения о независимости размерностей ядра и коядра от s — из того, что элементы ядер не зависят от s.

Все это обобщается на задачи Дирихле и Неймана с неоднородными граничными условиями, как в п. 11.1. Некоторые детали в более общей ситуации читатель найдет в § 16. Следствия для операторов D и N в пространствах H^s мы отметим немного ниже.

Утверждения об однозначной разрешимости или фредгольмовости имеют место одновременно с утверждениями о повышении гладкости. В частности, для задач с однородными граничными условиями, если $-\varepsilon<s'<s''<\varepsilon$ и решение принадлежит пространству с индексом $1+s'$, а правая часть — пространству с индексом $-1+s''$, то решение принадлежит пространству с индексом $1+s''$. (Аналогичную связь утверждений мы обсуждали в §§ 6 и 7.) Получаются также утверждения о гладкости собственных и присоединенных функций наших спектральных задач. Обобщаются утверждения об их полноте или базисности.

Далее, на те s, для которых получается однозначная разрешимость задачи Дирихле, разложение Вейля обобщается на пространства $H^{1+s}(\Omega)$. В теореме, которую мы сейчас приведем, учтено, что пробные функции принадлежат $H^{1-s}(\Omega)$. Обозначения пространств придется немного усложнить по сравнению с п. 11.2.

Теорема 11.7.4. *Пусть задача Дирихле для системы с оператором L однозначно разрешима при $|s|<\varepsilon$. Тогда пространство $H^{1+s}(\Omega)$ разлагается в прямую сумму $H_1(s)\dotplus H_2(s)$ подпространства $H_1(s)=\widetilde{H}^{1+s}(\Omega)=\mathring{H}^{1+s}(\Omega)$ функций с нулевыми граничными значениями и подпространства $H_2(s)=H_2(s,L)$ решений однородной системы $Lu=0$ в Ω.*

Для соответствующего разложения $u=u_1+u_2$ сохраним название *разложение Вейля* в $H^{1+s}(\Omega)$, отвечающее оператору L.

Пусть и для формально сопряженной системы задача Дирихле однозначно разрешима при $|s| < \varepsilon$. Договоримся считать, что $Lu_2 = 0$ и $\widetilde{L}v_2 = 0$ для разложения Вейля $v = v_1 + v_2$ в $H^{1-s}(\Omega)$, отвечающего оператору $\widetilde{L}$. Тогда при этих s остается справедливой формула (11.2.3):

$$\Phi_\Omega(u, v) = (Lu_1, v_1)_\Omega + (T^+ u_2, v_2^+)_\Gamma. \tag{11.7.5}$$

Это позволяет распространить на рассматриваемые сейчас s и формулу (11.2.4). Запишем ее обобщение так:

$$\widetilde{H}^{-1+s}(\Omega) = \widetilde{H}_1^{-1+s}(\Omega) \dot{+} \widetilde{H}_2^{-1+s}(\Omega). \tag{11.7.6}$$

Здесь справа первое подпространство состоит из непрерывных антилинейных функционалов на $\widetilde{H}^{1-s}(\Omega)$, продолженных нулем на $H_2(-s, \widetilde{L})$, оно изоморфно $H^{-1+s}(\Omega)$ и не содержит функционалов, сосредоточенных на Γ. Второе подпространство справа в (11.7.6) состоит из функционалов с носителями на Γ, оно изоморфно $H^{-1/2+s}(\Gamma)$.

Двусторонняя априорная оценка для решений задачи Дирихле в рассматриваемых сейчас пространствах получается с использованием разложения Вейля. Задача Неймана сводится к задаче Дирихле (11.2.5) для неоднородной системы в $\widetilde{H}^{1+s}(\Omega)$ и задаче Неймана (11.2.6) для однородной системы в $H_2(s, L)$. Для решения $u = u_1 + u_2$ снова получается двусторонняя оценка.

Если форма Φ_Ω сильно коэрцитивна на $\widetilde{H}^1(\Omega)$ и оператор $\mathcal{L}_D$ обратим при $|s| < \varepsilon$, то оператор Дирихле D продолжается до ограниченного оператора из $H^{1/2+s}(\Gamma)$ в $H^{-1/2+s}(\Gamma)$ при тех же s. Аналогично, если форма Φ_Ω сильно коэрцитивна на $H^1(\Omega)$ и оператор $\mathcal{L}_N$ обратим при $|s| < \varepsilon$, то оператор Неймана N продолжается до ограниченного оператора из $H^{-1/2+s}(\Gamma)$ в $H^{1/2+s}(\Gamma)$ при тех же s. Конечно, если выполнено второе предположение, то операторы D и N обратимы и это взаимно обратные операторы.

Для спектральных задач для операторов D и N на Γ получаются утверждения о гладкости, полноте и базисности, аналогичные упомянутым выше.

Сказанное обобщается и на смешанные задачи, но при $|s| < \varepsilon$ с достаточно малым ε.

Разложение Вейля пространства $H^1(\Omega; \Gamma_1)$, указанное в предложении 11.4.4, обобщается на $H^{1+s}(\Omega; \Gamma_1)$ с s, близкими к нулю. *Это пространство является прямой суммой подпространства* $\widetilde{H}^{1+s}(\Omega)$ *и подпространства решений задачи Дирихле для однородной си-*

стемы с данными Дирихле, равными нулю на Γ_1. *Последнее подпространство изоморфно* $\widetilde{H}^{1/2+s}(\Gamma_2)$. Теорему Шнейберга можно применять либо к оператору в этих пространствах, отвечающему задаче с однородными граничными условиями, либо к операторам, возникающим при сведéнии смешанной задачи к уравнениям на границе.

11.8. Примеры.

1. Сначала мы рассмотрим пример хорошо известной сильно эллиптической системы с двумя разными задачами Неймана, возникающими при разных записях этой системы в дивергентной форме, или, что то же, при разном выборе квадратичной формы. Это уже упомянутая в п. 11.1 *система Ламе*

$$Lu := -\mu\Delta u - (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} u = f. \tag{11.8.1}$$

Здесь $d = n$, так что это $(n \times n)$-система; λ, μ — вещественные числа, называемые *параметрами Ламе* упругой среды. Символ этого однородного оператора равен

$$\mu|\xi|^2 I + (\lambda+\mu)(\xi_1, \ldots, \xi_n)'(\xi_1, \ldots, \xi_n), \tag{11.8.2}$$

и соответствующая квадратичная форма имеет вид

$$\mu|\xi|^2|\zeta|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot\zeta|^2. \tag{11.8.3}$$

Отсюда видно, что система сильно эллиптична при

$$\mu > 0, \quad \lambda > -2\mu. \tag{11.8.4}$$

Это необходимые и достаточные условия (для проверки необходимости второго условия достаточно написать левый верхний элемент матрицы (11.8.2), он должен быть положительным).

Первая возможная запись оператора L в дивергентной форме видна из (11.8.1):

$$(Lu)_k = -\mu\operatorname{div}\operatorname{grad} u_k - (\lambda+\mu)\partial_k \operatorname{div} u \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{11.8.5}$$

Имеет место формула Грина

$$(Lu, v)_\Omega = \Phi_\Omega(u, v) - (T^+u, v^+)_\Gamma \tag{11.8.6}$$

с (гладкой) конормальной производной

$$T^+u = T_1^+u = \mu\partial_\nu u + (\lambda+\mu)(\operatorname{div} u)\nu \tag{11.8.7}$$

и формой

$$\Phi_\Omega(u,v)=\Phi_{\Omega,1}(u,v)=$$
$$=\int\limits_\Omega\Big[\sum_1^n \mu\operatorname{grad}u_k\cdot\operatorname{grad}\bar v_k+(\lambda+\mu)\operatorname{div}u\cdot\operatorname{div}\bar v\Big]\,dx. \quad (11.8.8)$$

Ясно, что коэрцитивность на $H^1(\Omega)$ имеет место при $\mu>0$, $\lambda\geqslant-\mu$. Но так как

$$|\operatorname{div}u|^2\leqslant n\sum_1^n|\partial_j u_j|^2\leqslant n|\operatorname{grad}u|^2,$$

то условиям коэрцитивности можно придать вид

$$\mu>0,\quad \lambda>-\mu(n+1)/n. \quad (11.8.9)$$

Физически важнее другая задача (the traction problem), в которой

$$(Lu)_k=-\mu\sum_j\partial_j(\partial_k u_j+\partial_j u_k)-\lambda\partial_k\operatorname{div}u\quad (k=1,\dots,n) \quad (11.8.10)$$

и формула Грина имеет место с (гладкой) конормальной производной

$$T^+u=T_2^+u=\mu(\partial_j u_k+\partial_k u_j)\nu+\lambda(\operatorname{div}u)\nu \quad (11.8.11)$$

(в первых скобках — матрица) и формой

$$\Phi_{\Omega,2}(u,v)=$$
$$=\int\limits_\Omega\Big[\frac{\mu}{2}\sum_{j,k=1}^n(\partial_j u_k+\partial_k u_j)(\partial_j\bar v_k+\partial_k\bar v_j)+\lambda\operatorname{div}u\cdot\operatorname{div}\bar v\Big]\,dx. \quad (11.8.12)$$

Очевидно, что коэрцитивность на $H^1(\Omega)$ имеет место в силу второго неравенства Корна (11.1.18) при $\mu>0$, $\lambda\geqslant0$. Но она на самом деле имеет место при

$$\mu>0,\quad \lambda>-2\mu/n. \quad (11.8.13)$$

Это следует из неравенств [225]

$$|\operatorname{div}u|^2\leqslant n\sum_1^n|\partial_j u_j|^2\leqslant\frac{n}{4}\sum_{j,k=1}^n|\partial_j u_k+\partial_k u_j|^2.$$

2. Теперь мы построим примеры сильно эллиптических систем 2-го порядка, для которых соответствующие формы не коэрцитивны

на $H^1(\Omega)$. Эти примеры подсказаны рассмотрениями Агмона в книге [64, Sec. 11] скалярных сильно эллиптических уравнений высокого порядка.

Пусть $P(D)$ — матричный однородный эллиптический оператор 1-го порядка с вещественными постоянными коэффициентами, $d \geqslant 2$. Например,

$$P(D) = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ -D_2 & D_1 \end{pmatrix}. \tag{11.8.14}$$

Здесь $d = n = 2$. Положим (в общем случае)

$$L(D) = P'(D) \cdot P(D) + \tau I, \tag{11.8.15}$$

где штрих обозначает транспозицию и τ — сколь угодно большая положительная постоянная, $D_j = -i\partial_j$. Оператор $L(D)$ сильно эллиптичен: при вещественных ξ для его старшей части имеем в силу однородности и невырожденности матрицы $P(\xi)$

$$L_0(\xi)\zeta \cdot \overline{\zeta} = |P(\xi)\zeta|^2.$$

Область Ω может быть любой, в частности имеющей гладкую границу. Форму Φ_Ω определим формулой

$$\Phi_\Omega(u, v) = \int_\Omega \left[P(D)u(x) \cdot \overline{P(D)v(x)} + \tau u(x) \cdot \overline{v(x)} \right] dx, \tag{11.8.16}$$

$\tau > 0$. Форма $\Phi_\Omega(u, u)$ сильно коэрцитивна на $\widetilde{H}^1(\Omega)$.

Пусть определитель матрицы $P(\zeta)$ обращается в нуль при некотором (невещественном) ζ, и пусть u_0 — соответствующий собственный вектор. Тогда старшая часть формы $\Phi_\Omega(u, u)$ обращается в нуль при подстановке в нее функций

$$u_\lambda(x) = e^{i\lambda\zeta\cdot x} u_0. \tag{11.8.17}$$

Размерность натянутого на них линейного пространства бесконечна. Если предположить, что при некотором τ имеет место неравенство

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant C\Phi_\Omega(u, u),$$

то мы приходим к противоречию. Действительно, на только что указанных функциях и их линейных комбинациях оно принимает вид

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant C\tau \|u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

и распространяется на пределы этих линейных комбинаций в $H^1(\Omega)$. Но такое неравенство влечет конечномерность этого пространства: единичный шар в нем в L_2-норме оказывается компактным.

Более того, при $\tau = 0$ конормальные производные $P'(\nu)[P(D)u]^+$ всех этих функций оказываются нулевыми. Значит, задача Неймана для рассмотренных систем нефредгольмова при любом τ.

Интересно отметить, что в случае оператора (11.8.14) оператор (11.8.15) распадается на два скалярных оператора $-\Delta + \tau$. Если соответствующую форму записать в виде

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \bar{v}) + \tau u \cdot \bar{v})\, dx,$$

то она, конечно, сильно коэрцитивна на $H^1(\Omega)$. Этот пример дополняет предыдущий и снова говорит о том, что наличие или отсутствие коэрцитивности на $H^1(\Omega)$ зависит не только от главного символа оператора L, но и от выбора записи этого оператора в дивергентной форме. Гладкая конормальная производная зависит от этой записи.

11.9. Другие задачи.

1. Сначала приведем некоторые элементарные соображения, относящиеся к третьей краевой задаче, или *задаче Робена* (ср., например, [258]):

$$Lu = f \text{ в } \Omega, \quad T^+u + \beta u^+ = h. \tag{11.9.1}$$

Здесь $\beta = \beta(x)$ — заданная на границе $d \times d$-матрица, которую мы для простоты предположим имеющей неотрицательную действительную часть:

$$\operatorname{Re} \beta(x) \geqslant 0. \tag{11.9.2}$$

Достаточно считать что ее элементы ограничены и измеримы на Γ. Формула Грина для $u, v \in H^1(\Omega)$ принимает вид

$$(f, v)_\Omega + (h, v^+)_\Gamma = \Phi_\Omega(u, v) + (\beta u^+, v^+)_\Gamma. \tag{11.9.3}$$

Если форма $\Phi_\Omega(u, u)$ сильно коэрцитивна на $H^1(\Omega)$, то это же верно в отношении формы $\Phi_\Omega(u, u) + (\beta u^+, u^+)_\Gamma$, и тогда по теореме Лакса—Мильграма получается однозначная разрешимость задачи в $H^1(\Omega)$ при $f \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega)$, $h \in H^{-1/2}(\Gamma)$. В сущности это небольшое обобщение того, что мы знаем про задачу Неймана.

Можно содержательным образом развивать эту тему дальше, но мы ограничимся сказанным.

2. Упомянем *задачу с косой производной.* В случае уравнения Лапласа она имеет вид

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \quad \nabla u \cdot W = h \text{ на } \Gamma. \tag{11.9.4}$$

В работе [254] W — векторное поле, образующее острый угол с нормалью. В литературе эта задача рассматривалась и для более общих уравнений в липшицевых областях [273].

3. Упомянем теперь довольно широкий класс задач, которые легко формулируются в случае однородных граничных условий. Пусть V — подпространство в $H^1(\Omega)$, содержащее $\mathring{H}^1(\Omega) = \widetilde{H}^1(\Omega)$:

$$\mathring{H}^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega). \tag{11.9.5}$$

Пусть V^* — сопряженное к V пространство относительно продолжения скалярного произведения в $L_2(\Omega)$. Ставится задача нахождения решения $u \in V$ уравнения $Lu = f$ с $f \in V^*$. Слабая постановка очевидна:

$$(f, v)_\Omega = \Phi_\Omega(u, v) \quad (v \in V). \tag{11.9.6}$$

Сильная коэрцитивность формы Φ_Ω на $H^1(\Omega)$ влечет ее сильную коэрцитивность на V и, следовательно, однозначную разрешимость задачи. Очевидно, что смешанные задачи с однородными граничными условиями принадлежат к этому классу.

11.10. Два классических операторных подхода к вариационным задачам. Рассмотрим сначала следующую абстрактную ситуацию. Пусть заданы три гильбертовых пространства H_{-1}, H_0, H_1 с компактными и плотными вложениями

$$H_{-1} \supset H_0 \supset H_1. \tag{11.10.1}$$

Скалярные произведения и нормы в этих пространствах обозначим через $(\cdot\,,\cdot)_k$ и $\|\cdot\|_k$, $k = -1, 0, 1$. Предположим, что пространства H_{-1} и H_1 дуальны относительно формы $(u, v)_0$. Далее, предположим, что на $H_1 \times H_1$ задана ограниченная полуторалинейная форма $\Phi(u, v)$, удовлетворяющая неравенству (сильной) коэрцитивности

$$\|u\|_1^2 \leqslant C \operatorname{Re} \Phi(u, u). \tag{11.10.2}$$

Тогда соотношение

$$\Phi(u, v) = (A_1 u, v)_0 \quad (u, v \in H_1) \tag{11.10.3}$$

определяет ограниченный линейный оператор $A_1 : H_1 \to H_{-1}$, и этот оператор обратим по теореме Лакса—Мильграма (см. п. 17.2); см. также [30, гл. 2, теор. 9.1]. Это модель *первого* и уже рассмотренного в этом параграфе подхода к вариационным задачам с однородными граничными условиями. В случае сильно эллиптической системы 2-го порядка пространство H_0 — это, конечно, $L_2(\Omega)$. В задачах Дирихле, Неймана и смешанной задаче соответственно

$$\begin{aligned} &H_1 = \widetilde{H}^1(\Omega), \quad H_{-1} = H^{-1}(\Omega), \quad A_1 = \mathcal{L}_D, \\ &H_1 = H^1(\Omega), \quad H_{-1} = \widetilde{H}^{-1}(\Omega), \quad A_1 = \mathcal{L}_N, \\ &H_1 = H^1(\Omega; \Gamma_1), \quad H_{-1} = \widetilde{H}^{-1}(\Omega; \Gamma_1), \quad A_1 = \mathcal{L}_m. \end{aligned} \tag{11.10.4}$$

Этот подход и в нашем дальнейшем изложении теории в липшицевых областях (в §§ 12 и 16) будет рассматриваться как основной.

Та же форма Φ определяет «сопряженный» к A_1 оператор A_1^* в смысле

$$\Phi(u, v) = (u, A_1^* v)_0 \quad (u, v \in H_1) \tag{11.10.5}$$

или, что то же,

$$\overline{\Phi(v, u)} = (A_1^* u, v)_0 \quad (u, v \in H_1). \tag{11.10.6}$$

Пусть Λ — наименьший замкнутый угол (сектор) с биссектрисой $\mathbb{R}_+$, содержащий все значения формы $\Phi(u, u)$. Из (11.10.3) следует, что мнимая часть формы оценивается через вещественную, поэтому раствор этого сектора меньше π. Оператор A_1 в H_{-1} имеет область определения H_1 и дискретный спектр, содержащийся в этом угле; при этом собственных значений нет в некоторой окрестности начала. То же верно для оператора A_1^*. Корневые векторы лежат в H_1.

Пусть теперь форма $\Phi(u, v)$ эрмитова:

$$\Phi(u, v) = \overline{\Phi(v, u)} \quad (u, v \in H_1). \tag{11.10.7}$$

В этом случае сектор Λ — это просто луч $\overline{\mathbb{R}}_+$. Переобозначим форму в этом случае через $\Psi(u, v)$ и соответствующий оператор через S_1. Он обратим. Мы имеем $(S_1 u, v)_0 = (u, S_1 v)_0$. Эрмитова форма

$$\langle u, v \rangle_1 = \Psi(u, v) = (S_1 u, v)_0 = (u, S_1 v)_0 \tag{11.10.8}$$

на H_1 удовлетворяет условию коэрцитивности

$$\|u\|_1^2 \leqslant C \langle u, u \rangle_1 \quad (u \in H_1), \tag{11.10.9}$$

и мы можем принять ее за скалярное произведение в H_1. Соответствующая норма эквивалентна исходной норме в H_1. Заменяя u на $S_1^{-1}u$ и v на $S_1^{-1}v$, получаем новое скалярное произведение в H_{-1}

$$\langle u, v\rangle_{-1} = (S_1^{-1}u, v)_0 = (u, S_1^{-1}v)_0. \tag{11.10.10}$$

Соответствующая норма эквивалентна исходной норме в H_{-1}, а оператор S_1 (с областью определения H_1) является самосопряженным в H_{-1} относительно этого скалярного произведения. Мы уже использовали эту возможность в п. 11.6. Компактный оператор S_1^{-1} в H_{-1} тоже является самосопряженным относительно этого скалярного произведения.

В общем случае, поскольку операторы A_1 и A_1^* в H_{-1} имеют общую область определения H_1, вещественная часть S_1 этих операторов легко вводится как их полусумма. Соответствующая форма $\Psi(u, v)$ есть полусумма форм $\Phi(u, v)$ и $\overline{\Phi(v, u)}$, она при $u = v$ положительна и удовлетворяет неравенству (11.10.9)

$$\|u\|_1^2 \leqslant C\Psi(u, u). \tag{11.10.11}$$

По оператору S_1 определяются скалярные произведения (11.10.8) и (11.10.10). Фактически он строится по форме Φ.

Мы еще хотим указать оценку для резольвенты оператора A_1, аналогичную (8.1.33).

Предложение 11.10.1. *Пусть Λ' — открытый угол с вершиной в начале, содержащий $\Lambda \setminus \{0\}$. Тогда при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda'$ для решения $v(\lambda)$ уравнения $(A_1 - \lambda I)v(\lambda) = f$, $f \in H_{-1}$, справедлива оценка*

$$\|v(\lambda)\|_1 + |\lambda|\|v(\lambda)\|_{-1} \leqslant C_1\|f\|_{-1} \tag{11.10.12}$$

с постоянной C_1, не зависящей от f и λ.

Проверка аналогична проверке оценки (8.1.33).

Второй подход к нашим задачам состоит в том, что по существу то же, что и (11.10.3), соотношение

$$\Phi(u, v) = (A_2u, v)_0 \quad (v \in H_1) \tag{11.10.13}$$

рассматривается как определяющее неограниченный линейный оператор A_2 в H_0 с областью определения $H_2 = D(A_2)$, содержащейся в H_1:

$$H_1 \supset H_2. \tag{11.10.14}$$

В абстрактных рамках область определения $D(A_2)$ оператора A_2 определяется так. Она состоит из таких $u \in H_1$, что антилинейный функционал $\Phi(u,v)$ на H_1 непрерывен по норме $\|v\|_0$:

$$|\Phi(u,v)| \leqslant C_u \|v\|_0. \tag{11.10.15}$$

Он поэтому продолжается до непрерывного антилинейного функционала на H_0 и записывается в виде (11.10.13). В H_2 вводится норма графика

$$\|u\|_2 = (\|u\|_0^2 + \|A_2 u\|_0^2)^{1/2}, \tag{11.10.16}$$

после чего H_2 становится гильбертовым пространством, а A_2 — ограниченным оператором из H_2 в H_0.

Заметим, что если $A_1 u = f \in H_0$, то форма $\Phi(u,v) = (f,v)_0$, конечно, непрерывна по v в H_0 и $A_2 u = A_1 u$, $A_2^{-1} f = A_1^{-1} f$. Поэтому A_2 — сужение оператора A_1 на H_2. В наших конкретных задачах это реализации соответствующего оператора L в $L_2(\Omega)$. Спектры и корневые векторы у операторов A_1 и A_2 одинаковы. Это следует из того, что собственные векторы оператора A_1 принадлежат H_0, а значит, H_2, поскольку собственные значения ненулевые. Ср. с п. 11.6. Аналогично обстоит дело с операторами A_2^* и A_1^*, а также с операторами S_2 и S_1, из которых первый определяется формой $\Psi(u,v)$ в H_0 и является самосопряженным в этом пространстве:

$$\Psi(u,v) = (S_2 u, v)_0 = (u, S_2 v)_0 \quad (u, v \in D(S_2)). \tag{11.10.17}$$

Оператор A_2^* является сопряженным к A_2.

Предложение 11.10.2. *Оператор A_2 обратим. То же верно для операторов A_2^* и S_2.*

Доказательство ([84, с. 11]). Что из $A_2 u = 0$ следует $u = 0$, видно из (11.10.3) и (11.10.13). Покажем, что уравнение $A_2 u = f$ имеет решение в H_2 при любом $f \in H_0$. Ср. с п. 17.2.

Формы $\Phi(u,v)$ и $(u,v)_1$ — это два общих представления непрерывного антилинейного функционала над H_1. Поэтому существует такой ограниченный обратимый оператор B в H_1, что

$$\Phi(u,v) = (Bu, v)_1 \quad (u, v \in H_1). \tag{11.10.18}$$

Если $f \in H_0$, то (f, v) — непрерывный антилинейный функционал над H_0 и, значит, непрерывный функционал над H_1. Поэтому существует такой непрерывный оператор J из H_0 в H_1, что

$$(f, v)_0 = (Jf, v)_1 \quad (v \in H_1). \tag{11.10.19}$$

Если $A_2 u = f$, то

$$(Bu, v)_1 = \Phi(u,v) = (f,v)_0 = (Jf, v)_1 \quad (v \in H_1).$$

Получаем $Bu=Jf$, откуда $u=B^{-1}Jf$. Как легко проверить, это формула для искомого решения в H_1, но оно лежит в H_2, так как $f\in H_0$. □

Как и в теореме Лакса—Мильграма, это утверждение сохраняется, если справа в (11.10.3) заменить действительную часть формы ее модулем.

Следствие 11.10.3. *Пространство $H_2=D(A_2)$ плотно и компактно вложено в H_1. То же верно для $D(A_2^*)$ и $D(S_2)$.*

Доказательство. Этот оператор вложения $\mathcal{E}_{2,1}$ можно представить в виде $S_1^{-1}\mathcal{E}_{0,-1}S_2$, где $\mathcal{E}_{0,-1}$ — оператор вложения H_0 в H_{-1}. Он компактен, как и S_1^{-1}. Поэтому $\mathcal{E}_{2,1}$ компактен.

Далее, если $u_0\in H_1$, то $v_0=S_1u_0$ можно аппроксимировать в H_{-1} элементами $v_k\in H_0$. Тогда $w_k=S_2^{-1}v_k$ принадлежат H_2 и сходятся к u_0 в H_1. □

См. также [22, гл. VI, § 2].

Для оператора A_2 справедлив также аналог предложения 11.10.1:

Предложение 11.10.4. *Для решений $v(\lambda)$ в H_2 уравнения*

$$(A_2-\lambda I)v(\lambda)=f,\quad f\in H_0,$$

при $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\Lambda'$ справедлива оценка

$$\|v(\lambda)\|_2+|\lambda|\|v(\lambda)\|_0\leqslant C\|f\|_0. \tag{11.10.20}$$

с постоянной, не зависящей от f и λ. То же верно для операторов A_2^* и S_2 вместо A_2.

Доказательство. Пусть сначала λ находится в угле раствора меньше π с биссектрисой $\mathbb{R}_-$. Тогда

$$\operatorname{Re}\Phi(v(\lambda),v(\lambda))-\operatorname{Re}\lambda(v(\lambda),v(\lambda))=\operatorname{Re}(f,v(\lambda)),$$

и здесь первое слагаемое слева неотрицательно. Получаем

$$|\operatorname{Re}\lambda|\|v(\lambda)\|_0\leqslant\|f\|_0,$$

что дает нужную оценку второго слагаемого слева в (11.10.20). На λ из $\mathbb{C}\setminus\Lambda'$ она распространяется переходом от Φ к формам $e^{i\theta}\Phi$ с малыми $|\theta|$. Чтобы оценить первое слагаемое слева в (11.10.20), надо оценить $\|v(\lambda)\|_0$ и $\|A_2v(\lambda)\|_0$. Но первое фактически уже сделано, а $A_2v(\lambda)=f+\lambda v(\lambda)$, здесь второе слагаемое справа мы только что оценили. □

Второй подход к задачам для сильно эллиптических систем тоже общеизвестен, отражен, например, в монографиях [84] и [22, гл. VI,

§ 2] и рассматривался в очень многих работах. Конечно, важнейший вопрос — возможно более полное описание пространства H_2. Для уравнений 2-го порядка с гладкими коэффициентами в области с гладкой границей оно получается, если выполнены условия эллиптичности, из результатов общей теории, изложенной у нас в § 7. Это подпространство в $H^2(\Omega)$, выделяемое однородными граничными условиями. При этом ясно, что, например, в случае задачи Неймана области определения операторов A_2 и A_2^* могут быть различными.

Оба подхода обобщаются на ситуацию, когда задача первоначально фредгольмова и приводится к однозначно разрешимой включением в L слагаемого μu с достаточно большим положительным μ. Оба подхода распространяются также также на задачи для систем высших порядков.

Первый подход удобен тем, что пространства заданы заранее и «адекватны» рассматриваемой задаче, как в «гладких» задачах. Для второго подхода это так обычно только в гладком случае. Но он удобен тем, что оператор A_2 всегда действует в $L_2(\Omega)$.

Операторы A_1 и A_2 имеют у нас дискретный спектр, поскольку их области определения компактно вложены соответственно в пространства H_{-1} и H_0.

В п. 16.7 мы обсудим важные факты, относящиеся к дробным степеням операторов A_1 и A_2.

§ 12. Операторы типа потенциала и задачи сопряжения

12.1. Система на торе. Материал этого параграфа, очень важный в теории сильно эллиптических систем в липшицевых областях, удобно излагать, рассматривая систему в двух примыкающих одна к другой областях, внутренней и внешней. Но в неограниченной внешней области приходится разбираться в условиях на бесконечности. Чтобы упростить изложение, мы предположим, что область $\Omega = \Omega^+$ лежит на стандартном торе $\mathbb{T} = \mathbb{T}^n$ с 2π-периодическими координатами $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и связная липшицева граница Γ отделяет ее от второй области Ω^-, дополняющей замыкание $\overline{\Omega^+}$ до тора, так что

$$\mathbb{T} = \Omega^+ \cup \Gamma \cup \Omega^-.$$

Нормаль ν в точках на Γ, в которых она есть, считаем направленной в Ω^-, так что для Ω^- она является внутренней. Это надо будет учитывать в формулах для Ω^-. Конормальную производную функции u на Γ со стороны Ω^- будем обозначать через T^-u. Если она гладкая, то образована при помощи внутренней по отношению к Ω^- нормали. В случае однозначной разрешимости задач Дирихле и Неймана в $\Omega^\pm$ мы теперь имеем четыре оператора Пуанкаре—Стеклова:

$$N^\pm T^\pm u = \pm u^\pm \quad \text{и} \quad D^\pm u^\pm = \pm T^\pm u. \tag{12.1.1}$$

Мы получим, в частности, ряд формул, аналоги которых для классических уравнений хорошо известны.

Отметим, что теперь $\widetilde{H}^s(\Omega^\pm)$ — подпространства в $H^s(\mathbb{T})$ (состоящие из элементов с носителями в $\overline{\Omega^\pm}$).

Систему (11.1.1) сейчас будем считать заданной и сильно эллиптической на торе. Коэффициенты $a_{j,k}$ и b_j в общем случае можно считать липшицевыми, но это предположение часто можно ослабить. *Форму $\Phi_{\mathbb{T}}(u,v)$ будем предполагать сильно коэрцитивной на* $H^1(\mathbb{T})$. Отсюда следует сильная коэрцитивность форм $\Phi_{\Omega^\pm}(u,v)$ на $\widetilde{H}^1(\Omega^\pm)$ (как на подпространствах) и, значит, однозначная разрешимость задач Дирихле в $\Omega^\pm$. Когда это понадобится, мы предположим сильную коэрцитивность последних форм на $H^1(\Omega^\pm)$, чтобы иметь однозначную разрешимость и задач Неймана. Автоматически наши предположения верны и для формально сопряженной системы, поскольку ей отвечают те же формы. Как правило, если система задана только в Ω^+ и удовлетворяет там нужным условиям, ее можно продолжить на тор так, чтобы нужные условия удовлетворялись на торе и в Ω^-. Мы не будем уточнять слова «как правило».

Уравнение (система) $Lu = f$ на торе — это уравнение на гладком многообразии, хотя и с не очень гладкими коэффициентами. Никаких «липшицевых трудностей» с ним нет. Наши предположения о гладкости коэффициентов позволяют рассматривать L как оператор, действующий из $H^{1+\sigma}(\mathbb{T})$ в $H^{-1+\sigma}(\mathbb{T})$ при $|\sigma| \leqslant 1$. При этом вариационное (слабое) определение решения

$$(Lu, v)_{\mathbb{T}} = \Phi_{\mathbb{T}}(u,v) \quad (u \in H^{1+\sigma}(\mathbb{T}), v \in H^{1-\sigma}(\mathbb{T})) \tag{12.1.2}$$

равносильно обычному

$$Lu = f, \tag{12.1.3}$$

по крайней мере в смысле правил теории обобщенных функций. Действительно, если подействовать обеими частями в (12.1.3) на основную функцию $v \in C^\infty(\mathbb{T})$, то равенство $(Lu, v)_{\mathbb{T}} = \Phi_{\mathbb{T}}(u,v)$ получается перебрасыванием производных ∂_j на v, после чего можно распространить его на $v \in H^{1-\sigma}(\Omega)$ предельным переходом. И обратно, от (12.1.2) к (12.1.3) можно перейти, используя в качестве v бесконечно гладкие функции.

Если коэффициенты в L достаточно гладкие, то для обобщения утверждения об обратимости оператора L можно воспользоваться результатами § 6. Однако любопытно то обстоятельство, что здесь достаточна малая гладкость коэффициентов.

Теорема 12.1.1. *При наших предположениях о коэффициентах и о сильной коэрцитивности на торе оператор* $L\colon H^{1+\sigma}(\mathbb{T}) \to H^{-1+\sigma}(\mathbb{T})$ *обратим при* $|\sigma| \leqslant 1$.

В настоящем пункте мы проведем доказательство для $\sigma = 1$ при помощи построения левого параметрикса (ср. с § 6). Здесь любопытно также использование рядов Фурье вместо преобразования Фурье. Закончено доказательство будет в п. 16.4 при помощи интерполяции (хотя не намного сложнее сразу рассмотреть все σ); там же будет указано обобщение этой теоремы на другие пространства.

Сначала сделаем некоторые предварительные замечания.

В пространствах $H^s(\mathbb{T})$ есть, как мы знаем, две эквивалентные системы норм. Первая — это нормы, определяемые при помощи разбиения единицы на торе и норм в $\mathbb{R}^n$; соответствующие локальные координаты можно считать едиными — периодическими. Вторая — это нормы, определяемые при помощи рядов Фурье, они упоминались в п. 2.2:

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{T})} = \sum |c_\alpha(u)|^2 (1 + |\alpha|^2)^s, \tag{12.1.4}$$

где $c_\alpha(u)$ — коэффициенты Фурье функции u. Соответственно будем говорить «первые нормы» и «вторые нормы».

Рассмотрим оператор Φ умножения на функцию $\varphi(x)$ из $C^{0,1}(\mathbb{T})$. Если пользоваться первыми нормами, то

$$\|\varphi u\|_{H^0(\mathbb{T})} \leqslant \sup|\varphi(x)| \|u\|_{H^0(\mathbb{T})}. \tag{12.1.5}$$

Здесь норма оператора Φ мала, если мала верхняя грань модуля функции. Но

$$\|\varphi u\|_{H^1(\mathbb{T})} \leqslant \sup|\varphi(x)| \|u\|_{H^1(\mathbb{T})} + K\|u\|_{H^0(\mathbb{T})}. \tag{12.1.6}$$

Здесь постоянная K, вообще говоря, не мала. Однако можно применить прием, использованный в п. 1.9, и представить этот оператор в виде суммы оператора с малой нормой в $H^1(\mathbb{T})$ и оператора, действующего ограниченным образом из $H^0(\mathbb{T})$ в $H^1(\mathbb{T})$. Это понадобится нам ниже.

Для этого введем оператор

$$\Theta_N u(x) = \sum_{|\alpha|\geqslant N} c_\alpha(u)e^{i\alpha\cdot x}. \tag{12.1.7}$$

Если пользоваться вторыми нормами, то операторы Θ_N и $I-\Theta_N$ имеют норму 1 в любом $H^s(\mathbb{T})$. Оператор $\Phi' = \Phi(I-\Theta_N)$ действует ограниченным образом из $H^0(\mathbb{T})$ в $H^1(\mathbb{T})$. Для оператора $\Phi'' = \Phi\Theta_N$ получается оценка

$$\|\Phi'' u\|_{H^1(\mathbb{T})} \leqslant [\sup|\varphi(x)| + KN^{-1}]\|u\|_{H^1(\mathbb{T})}, \tag{12.1.8}$$

и здесь постоянная справа мала при большом N, если мала величина $\sup|\varphi(x)|$.

Доказательство теоремы для $\sigma = 1$. Запишем оператор L в виде

$$L = a(x,D) + L_1, \quad \text{где } a(x,D) = \sum D_j a_{j,k}(x) D_k \tag{12.1.9}$$

и L_1 — оператор первого порядка, он действует ограниченным образом из $H^1(\mathbb{T})$ в $H^0(\mathbb{T})$.

Зададим малое число $\eta > 0$ (насколько малое, будет видно дальше) и возьмем бесконечно гладкое разбиение единицы

$$\sum_1^M \varphi_l(x) \equiv 1 \tag{12.1.10}$$

на торе, настолько мелкое, что для всех коэффициентов и всех l справедливо неравенство

$$\|a_{j,k}(x) - a_{j,k}(y)\| \leqslant \eta \quad \text{при } x, y \in \operatorname{supp}\varphi_l \tag{12.1.11}$$

(в качестве нормы матрицы используем, например, квадратный корень из суммы квадратов модулей ее элементов). Зафиксируем по точке x_l в носителе каждой функции φ_l. Оператор $a(x_l, D)$ определим как получаемый из $a(x,D)$ замораживанием коэффициентов в точке x_l:

$$a(x_l, D) = \sum D_j a_{j,k}(x_l) D_k. \tag{12.1.12}$$

Здесь не обязательно записывать производные с двух сторон от коэффициента. Этот оператор допускает запись в виде ряда типа Фурье

$$a(x_l, D)u(x) = \sum_{0\neq\alpha\in\mathbb{Z}^n} a(x_l,\alpha)c_\alpha(u)e^{i\alpha\cdot x}, \tag{12.1.13}$$

где $c_\alpha(u)$ — коэффициенты Фурье функции u, $u \in H^2(\mathbb{T})$. В силу эллиптичности все коэффициенты $a(x_l,\alpha)$ отличны от нуля, кроме нулевого. Для построения левого параметрикса мы введем операторы

$$b(x_l, D)f(x) = \sum_{0\neq\alpha\in\mathbb{Z}^n} a^{-1}(x_l,\alpha)c_\alpha(f)e^{i\alpha\cdot x} \tag{12.1.14}$$

($f \in H^0(\mathbb{T})$) и

$$b(x,D)=\sum_1^M \varphi_l(x)b(x_l,D). \tag{12.1.15}$$

Заметим, что это ограниченные операторы из $H^0(\mathbb{T})$ в $H^2(\mathbb{T})$, причем норма оператора (12.1.14) ограничена постоянной, не зависящей от выбора точки x_l.

Мы имеем

$$b(x,D)a(x,D)=\sum_1^M \varphi_l(x)b(x_l,D)a(x,D)=$$

$$=\sum_1^M \varphi_l(x)b(x_l,D)a(x_l,D)+\sum_1^M \varphi_l(x)b(x_l,D)[a(x,D)-a(x_l,D)].$$

Первая сумма справа отличается от единичного оператора на одномерный оператор. Во второй сумме мы в каждом слагаемом суммы по l, j, k (см. (12.1.12)) прокоммутируем оператор умножения на гладкую функцию φ_l и оператор $b(x_l,D)D_j$ — последний является псевдодифференциальным оператором порядка -1 на торе с не зависящим от x символом. Сошлемся на тот факт, что такой коммутатор является оператором порядка -2 (с учетом того, что φ_l — скалярная функция; см. п. 17.4). Таким образом,

$$b(x,D)a(x,D)=I+\sum_{l,j,k} b(x_l,D)D_j a_{j,k,l}(x)D_k+T_1, \tag{12.1.16}$$

где

$$a_{j,k,l}(x)=\varphi_l(x)[a_{j,k}(x)-a_{j,k}(x_l)] \tag{12.1.17}$$

и T_1 — ограниченный оператор из $H^1(\mathbb{T})$ в $H^2(\mathbb{T})$. Обозначим через $A_{j,k,l}$ оператор умножения на функцию (12.1.17). Это оператор с малой нормой $\sup|a_{j,k,l}(x)|$ в $H^0(\mathbb{T})$. Заменим его на $A_{j,k,l}\Theta_N + A_{j,k,l}[I-\Theta_N]$ с большим N.

Как нетрудно убедиться, мы получаем

$$b(x,D)a(x,D)=I+T_2+T_3,$$

где T_2 — оператор с малой нормой в $H^1(\mathbb{T})$ и $H^2(\mathbb{T})$, и мы можем предположить, что она меньше 1, а T_3 — ограниченный оператор из $H^1(\mathbb{T})$ в $H^2(\mathbb{T})$.

Пусть теперь $f\in H^0(\mathbb{T})$. Решение u уравнения $Lu=f$ заведомо существует и единственно в $H^1(\mathbb{T})$. Для него мы имеем

$$u=(I+T_2)^{-1}[b(x,D)(f-L_1u)-T_3u].$$

Получаем, что $u \in H^2(\mathbb{T})$. Этот результат о гладкости доказывает существование нужного решения. Единственность следует из единственности в $H^1(\mathbb{T})$. □

Обратный к L оператор является интегральным:

$$(L^{-1}f)(x) = \int\limits_{\mathbb{T}} E(x, y) f(y)\, dy. \tag{12.1.18}$$

Ядро $E(x, y)$ этого интегрального оператора — фундаментальное решение для L. Если функция f задана только в $\Omega^{\pm}$, то это *ньютоновский*, или *объемный*, потенциал в $\Omega^{\pm}$.

12.2. Определения потенциалов простого и двойного слоя. Как и в скалярном случае, *потенциал простого слоя* на функциях, скажем, из $H^0(\Gamma)$ обычно определяют формулой

$$u = \mathcal{A}\psi(x) = \int\limits_{\Gamma} E(x, y)\psi(y)\, dS_y \quad (x \in \mathbb{T}). \tag{12.2.1}$$

Это интеграл со слабой (интегрируемой) особенностью ядра. Но нам этот оператор нужен в первую очередь при $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Ниже мы перейдем к более общему определению этого оператора.

Потенциал двойного слоя на достаточно гладкой границе определяют в общем случае формулой

$$u = \mathcal{B}\varphi(x) = \int\limits_{\Gamma} [\widetilde{T}_y^{+} E^*(x, y)]^* \varphi(y) dS_y \quad (x \notin \Gamma). \tag{12.2.2}$$

Здесь звездочка обозначает переход к эрмитово-сопряженной матрице. В случае $L = -\Delta$ или $-\Delta + 1$ звездочки и тильда не нужны. Функцию φ предполагают принадлежащей, по крайней мере, $H^0(\Gamma)$. Но при переходе на границу ($x \in \Gamma$), вообще говоря, возникает интеграл с критической особенностью, который надо понимать как сингулярный интегральный оператор (см. формулу (17.4.8)). Это возможно и в случае липшицевой поверхности, но ведет в этом случае к большим аналитическим трудностям. Такие же трудности возникают при рассмотрении первых производных потенциала простого слоя. Краткое обсуждение этого подхода содержится в §18 (пункт 5 в замечаниях к §16). Вдобавок, как уже упомянуто, нам нужны более общие ψ.

Эти трудности удается обойти в другом подходе, который мы здесь изложим и которого придерживаемся. В частности, будет указано обобщение определения оператора (12.2.2), удобное в случае $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Этот подход основан на предположении об однозначной разрешимости задачи Дирихле. Его предложил Костабель [217], опираясь на результат Нечаса [91] о регулярности решений задачи Дирихле, и систематически изложил Маклин в книге [87]. Развитие этого метода с использованием однозначной разрешимости задач Дирихле и Неймана предпринято в работах автора, здесь оно воспроизводится и завершается в нужных сейчас рамках.

Пусть γ сейчас обозначает оператор перехода от функции на торе к ее следу на Г. Для этого оператора естественным образом определяется сопряженный оператор γ^*:

$$(\gamma^*\psi, v)_{\mathbb{T}} = (\psi, \gamma v)_{\Gamma}. \tag{12.2.3}$$

Так как γ — ограниченный оператор из $H^{1+\sigma}(\mathbb{T})$ в $H^{1/2+\sigma}(\Gamma)$ при $|\sigma| < 1/2$, то γ^* — ограниченный оператор из $H^{-1/2+s}(\Gamma)$ в $H^{-1+s}(\mathbb{T})$ при $|s| < 1/2$. Теперь, как в работе [217], определим оператор $\mathcal{A}$ формулой

$$\mathcal{A}\psi = L^{-1}\gamma^*\psi. \tag{12.2.4}$$

Автоматически получается

Предложение 12.2.1. *Оператор $\mathcal{A}$ действует ограниченным образом из $H^{-1/2+s}(\Gamma)$ в $H^{1+s}(\mathbb{T})$ и, значит, в $H^{1+s}(\Omega^{\pm})$ при $|s| < 1/2$.*

В частности, это ограниченный оператор из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^1(\mathbb{T})$. С другой стороны, сравнение формул (12.2.1) и (12.2.4) показывает, что при $\psi \in H^0(\Gamma)$ это один и тот же оператор.

Из определения (12.2.4) видно, что функция $u = \mathcal{A}\psi$ при $\psi \in H^{-1/2+s}(\Gamma)$, $|s| < 1/2$, удовлетворяет однородному уравнению $Lu = 0$ вне Г. На торе она удовлетворяет уравнению $Lu = \gamma^*\psi$ с правой частью, сосредоточенной на Г. Это тоже видно из формулы (12.2.4).

Поскольку функция $\mathcal{A}\psi$ принадлежит $H^{1+s}(\mathbb{T})$, $|s| < 1/2$, она имеет одинаковые граничные значения

$$\gamma^{\pm}\mathcal{A}\psi := A\psi, \tag{12.2.5}$$

и *это ограниченный оператор из $H^{-1/2+s}(\Gamma)$ в $H^{1/2+s}(\Gamma)$*. Ясно также, что $T^{\pm}\mathcal{A}$ — *ограниченные операторы в $H^{-1/2+s}(\Gamma)$*, $|s| < 1/2$.

Теперь мы хотим дать определение оператора $\mathcal{B}$ в аналогичных терминах. Это несколько сложнее.

Заметим, что двусторонняя гладкая конормальная производная корректно определена формулой

$$Tv = T^{\pm}v = \sum \nu_j(x)a_{j,k}(x)\gamma\partial_k v(x) \tag{12.2.6}$$

на функциях $v \in H^{2-s}(\mathbb{T})$ при $0 < s < 1/2$. Действительно, дифференцирование и переход на границу уменьшают индекс $2-s$ на $3/2$, следы $\gamma^{\pm}\partial_k v(x)$ совпадают, и оператор T действует ограниченным образом из $H^{2-s}(\mathbb{T})$ в $H^{1/2-s}(\Gamma)$.

Определим сопряженный оператор:

$$(T^*\varphi, v)_{\mathbb{T}} = (\varphi, Tv)_{\Gamma}. \tag{12.2.7}$$

Здесь можно считать, что $\varphi \in H^{s-1/2}(\Gamma)$ и $T^*\varphi \in H^{s-2}(\mathbb{T})$, $0 < s < 1/2$.

Нам нужен такой оператор $(\widetilde{T})^*$ для формально сопряженной системы. Он вводится аналогично.

Теперь определим оператор $\mathcal{B}$ формулой

$$\mathcal{B} = L^{-1}(\widetilde{T})^*. \tag{12.2.8}$$

Идентификация двух определений (12.2.2) и (12.2.8) оператора $\mathcal{B}$ при достаточно регулярных φ возможна, но требует специального исследования ядра оператора (12.2.2). См. [87], а также наше замечание 2 в конце п. 12.3.

Пока (12.2.8) — ограниченный оператор из $H^{s-1/2}(\Gamma)$ в $H^s(\mathbb{T})$ при $0 < s < 1/2$. А нам надо продолжить его для начала до ограниченного оператора из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^1(\Omega^{\pm})$.

12.3. Формула представления решения и ее следствия. Задача сопряжения. Для указанной в конце предыдущего пункта цели мы сначала выведем *формулу представления решения* через скачки этого решения и его конормальной производной (см. ниже формулу (12.3.4)), следуя Маклину [87]; см. также [217]. Эта формула важна и сама по себе и будет многократно использована дальше.

Введем обозначения для скачков:

$$[u]_{\Gamma} = u^- - u^+, \quad [Tu]_{\Gamma} = T^-u - T^+u. \tag{12.3.1}$$

Теорема 12.3.1. *Пусть u — функция на торе,*

$$u|_{\Omega^{\pm}} \in H^1(\Omega^{\pm}) \quad и \quad Lu|_{\Omega^{\pm}} = f^{\pm} \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega^{\pm}),$$

так что $f = f^+ + f^-$ принадлежит $H^{-1}(\mathbb{T})$. Тогда для u как элемента из $H^s(\mathbb{T})$, $0 < s < 1/2$, и $v \in H^{2-s}(\mathbb{T})$ справедливо соотношение

$$(Lu, v)_{\mathbb{T}} = (f, v)_{\mathbb{T}} + ([u]_{\Gamma}, \widetilde{T}v)_{\Gamma} - ([Tu]_{\Gamma}, \gamma v)_{\Gamma}. \tag{12.3.2}$$

Эту теорему мы докажем немного ниже. Поясним, что здесь считаются заданными u, v и $f^{\pm}$, так что конормальные производные $T^{\pm}u$ однозначно определяются формулами Грина. Конормальные производные от v являются гладкими. В частности, теорема применима при $f=0$.

Следствие 12.3.2. *При предположениях теоремы* 12.3.1
$$Lu = f + (\widetilde{T})^*[u]_\Gamma - \gamma^*[Tu]_\Gamma \tag{12.3.3}$$
и
$$u = L^{-1}f + \mathcal{B}[u]_\Gamma - \mathcal{A}[Tu]_\Gamma. \tag{12.3.4}$$

Доказательство теоремы 12.3.1. Запишем четыре формулы Грина — для операторов L и $\widetilde{L}$ и областей Ω^+ и Ω^-:
$$(Lu, v)_{\Omega^\pm} = \Phi_{\Omega^\pm}(u, v) \mp (T^\pm u, v^\pm)_\Gamma, \tag{12.3.5}$$
$$(u, \widetilde{L}v)_{\Omega^\pm} = \Phi_{\Omega^\pm}(u, v) \mp (u^\pm, \widetilde{T}^\pm v)_\Gamma. \tag{12.3.6}$$
Мы имеем
$$(Lu, v)_{\mathbb{T}} = (u, \widetilde{L}v)_{\mathbb{T}} = (u, \widetilde{L}v)_{\Omega^+} + (u, \widetilde{L}v)_{\Omega^-}. \tag{12.3.7}$$
Выражения для слагаемых справа берем из (12.3.6), после чего выражения для $\Phi_{\Omega^\pm}(u, v)$ берем из (12.3.5). Как нетрудно проверить, это и дает соотношение (12.3.2). □

Формула (12.3.4) напоминает представление, скажем, гармонических функций из учебников математической физики. Но это довольно деликатная формула. Мы сначала рассматривали u как обобщенную функцию на торе, а v — как основную функцию. Равенство (12.3.3) напоминает формулу для производной в смысле обобщенных функций от кусочно-гладкой функции на прямой, см., например, [2]. Затем мы воспользовались тем, что $u \in H^1(\Omega^\pm)$, благодаря чему $[u]_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$ и $[Tu]_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Из (12.3.4) для решений однородной системы в $\Omega^\pm$, если положить их равными нулю в дополнительной области $\Omega^\mp$, получается

Следствие 12.3.3. *Для решений однородной системы $Lu=0$ в $\Omega^\pm$, принадлежащих $H^1(\Omega^\pm)$, справедливы формулы*
$$-\mathcal{B}u^+ + \mathcal{A}T^+u = \begin{cases} u \text{ в } \Omega^+, \\ 0 \text{ в } \Omega^-; \end{cases} \tag{12.3.8}$$
$$\mathcal{B}u^- - \mathcal{A}T^-u = \begin{cases} u \text{ в } \Omega^-, \\ 0 \text{ в } \Omega^+. \end{cases} \tag{12.3.9}$$

Можно, конечно, рассмотреть и неоднородную систему в Ω^+ или в Ω^-, тогда слева добавляется слагаемое $L^{-1}f$.

Напомним, что мы предполагаем форму $\Phi_{\mathbb{T}}$ сильно коэрцитивной на $H^1(\mathbb{T})$, так что формы $\Phi_{\Omega^\pm}$ сильно коэрцитивны на $\widetilde{H}^1(\Omega^\pm)$.

Предложение 12.3.4. *Оператор $\mathcal{B}$ продолжается до ограниченного оператора из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^1(\Omega^\pm)$.*

Доказательство проведем для $\boldsymbol{\Omega^+}$. Ввиду однозначной разрешимости задачи Дирихле в Ω^+ мы в (12.3.8) можем считать u^+ произвольной функцией из $H^{1/2}(\Gamma)$. Остальные члены в этой формуле принадлежат $H^1(\Omega^+)$ — см., в частности, предложение 12.2.1. Считаем теперь оператор $\mathcal{B}$ определенным в $\Omega^\pm$ формулами (12.3.8)—(12.3.9). □

Формулой (12.3.4) мы теперь можем пользоваться как равенством в $H^1(\Omega^\pm)$.

Замечание 12.3.5. Поскольку нам предстоит обсуждать в п. 12.11 (и в § 16) обобщения излагаемых далее результатов на более общие пространства, следует обратить внимание на то, что ниже до конца п. 12.7 вместо сильной коэрцитивности мы фактически используем только однозначную разрешимость задач Дирихле, а позднее — Дирихле и Неймана. Исключения — теоремы 12.5.1 и 12.5.2.

При $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ функция $\mathcal{B}\varphi$ удовлетворяет однородному уравнению $Lu = 0$ в $\Omega^\pm$. На торе она удовлетворяет уравнению с правой частью, сосредоточенной на Γ.

Поскольку $\mathcal{B}$ — ограниченный оператор из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^1(\Omega^\pm)$, получаем, что $\gamma^\pm\mathcal{B}$ — *ограниченные операторы в* $H^{1/2}(\Gamma)$, *а* $T^\pm\mathcal{B}$ — *ограниченные операторы из* $H^{1/2}(\Gamma)$ *в* $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Предложение 12.3.6. *Пусть* $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$. *Тогда справедливы следующие формулы для скачков*:

$$[\mathcal{A}\psi]_\Gamma = 0, \quad [T\mathcal{A}\psi]_\Gamma = -\psi, \quad [\mathcal{B}\varphi]_\Gamma = \varphi, \quad [T\mathcal{B}\varphi]_\Gamma = 0. \quad (12.3.10)$$

Доказательство. Первая формула в (12.3.10) нам уже известна — см. (12.2.5). Используя ее, из формул (12.3.4) с $f = 0$ и $[u]_\Gamma = \varphi$ получаем третью формулу. Здесь пользуемся произволом в выборе $[u]_\Gamma$.

Пусть теперь $u = \mathcal{A}\psi$. Тогда $Lu = \gamma^*\psi$ на торе по определению оператора $\mathcal{A}$. С другой стороны, в силу (12.3.3) с учетом того, что $[u]_\Gamma = 0$, мы имеем $Lu = -\gamma^*[T\mathcal{A}\psi]_\Gamma$. Как легко проверить, ядро оператора γ^* (см. (12.2.3)) тривиально. Получаем вторую формулу в (12.3.10).

Теперь, используя ее и (12.3.4) при $f=0$, имеем

$$[Tu]_\Gamma = [T\mathcal{B}\varphi]_\Gamma - [T\mathcal{A}[Tu]_\Gamma]_\Gamma = [T\mathcal{B}\varphi]_\Gamma + [Tu]_\Gamma,$$

и мы получаем четвертую формулу в (12.3.10). □

Введем оператор

$$H = -T^{\pm}\mathcal{B}. \tag{12.3.11}$$

Это так называемый *гиперсингулярный оператор*. Он действует ограниченным образом из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Рассмотрим теперь следующую *задачу сопряжения*:

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega^{\pm}, \quad [u]_\Gamma = \varphi, \quad [Tu]_\Gamma = \psi. \tag{12.3.12}$$

Теорема 12.3.7. *При $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ задача* (12.3.12) *имеет одно и только одно решение, принадлежащее H^1 в $\Omega^{\pm}$. Оно выражается формулой*

$$u = \mathcal{B}\varphi - \mathcal{A}\psi. \tag{12.3.13}$$

Доказательство. Если $[u]_\Gamma$ и $[Tu]_\Gamma$ нулевые, то из (12.3.4) видно, что решение нулевое. С другой стороны, если определить решение формулой (12.3.13), то из формул скачков (12.3.10) получается, что $[u]_\Gamma=\varphi$, $[Tu]_\Gamma=\psi$, так что (12.3.13) — нужное решение. □

Этот результат можно распространить на случай неоднородного уравнения с использованием однозначной разрешимости системы $Lu=f$ на торе.

Замечания. 1. Отметим, что предполагать однозначную разрешимость задач Неймана в этом пункте нам не понадобилось.

2. При $\psi=0$ решение задачи (12.3.12) имеет вид $u=\mathcal{B}\varphi$ с оператором $\mathcal{B}$ в смысле второго определения (12.2.8). Но в случае достаточно гладких коэффициентов и границы известно, что оно имеет такой же вид с оператором $\mathcal{B}$ в смысле первого определения (12.2.2). Отсюда следует совпадение этих операторов, по крайней мере, при добавочных условиях гладкости на достаточно регулярных функциях.

12.4. Операторы на Γ и проекторы Кальдерона. Теперь, следуя [87], положим

$$B = \frac{1}{2}(\gamma^-\mathcal{B} + \gamma^+\mathcal{B}), \quad \widehat{B} = \frac{1}{2}(T^-\mathcal{A} + T^+\mathcal{A}). \tag{12.4.1}$$

Первый из этих операторов назовем *прямым значением потенциала двойного слоя*. Это ограниченный оператор в $H^{1/2}(\Gamma)$, а $\widehat{B}$ — ограниченный оператор в $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Из этих определений и формул скачков получаются следующие формулы для граничных значений потенциалов и их конормальных производных:

$$T^{\pm}\mathcal{A}\psi = \pm\frac{1}{2}\psi + \widehat{B}\psi, \quad \gamma^{\pm}\mathcal{B}\varphi = \mp\frac{1}{2}\varphi + B\varphi. \tag{12.4.2}$$

Далее, из (12.3.8) и (12.3.9) теперь получаются формулы

$$u^{\pm} = \mp Bu^{\pm} + \frac{1}{2}u^{\pm} \pm AT^{\pm}u, \tag{12.4.3}$$

$$T^{\pm}u = \pm Hu^{\pm} \pm \widehat{B}T^{\pm}u + \frac{1}{2}T^{\pm}u. \tag{12.4.4}$$

Здесь мы обошлись без аналитического вычисления пределов решения на границе и без вычисления его конормальных производных. Но снова формулы при добавочной гладкости согласуются с известными.

Положим

$$P^{+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - B & A \\ H & \frac{1}{2}I + \widehat{B} \end{pmatrix}, \quad P^{-} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + B & -A \\ -H & \frac{1}{2}I - \widehat{B} \end{pmatrix}. \tag{12.4.5}$$

Обозначим через X прямое произведение пространств $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$. Оно содержит два подпространства X^{+} и X^{-}: первое составляют столбцы Q^{+} из данных Коши (Дирихле и Неймана) для системы $Lu=0$ в Ω^{+}, второе — столбцы Q^{-} из данных Коши для этой системы в Ω^{-}. Элемент $(\varphi,\psi)'$ в каждом из этих подпространств при нашем предположении об однозначной разрешимости задач Дирихле параметризуется первой компонентой: $u^{\pm}=\varphi$ можно задать произвольно, а $T^{\pm}u=\psi$ однозначно определяется. Из единственности для двух задач Дирихле следует единственность для двух задач Коши.

Из формул (12.2.5), (12.3.11) и (12.4.2) нетрудно вывести, что операторы P^{-} и P^{+} действуют ограниченным образом в X и переводят любой столбец $(\varphi,\psi)'$ из X в столбцы из данных Коши соответственно решения (12.3.13) в Ω^{-} и того же решения с обратным знаком в Ω^{+}:

$$P^{-}(\varphi,\psi)' = (u^{-}, T^{-}u)', \quad P^{+}(\varphi,\psi)' = -(u^{+}, T^{+}u)'.$$

Далее, из формул (12.4.3)—(12.4.4) видно, что P^{-} переводит столбцы $(u^{-}, T^{-}u)'$ в себя и аннулирует столбцы $(u^{+}, T^{+}u)'$, а P^{+} переводит столбцы $\pm(u^{+}, T^{+}u)'$ в себя и аннулирует столбцы $(u^{-}, T^{-}u)'$. Значит,

$$(P^{\pm})^2 = P^{\pm}, \quad P^+P^- = P^-P^+ = 0. \tag{12.4.6}$$

Кроме того, сумма $P^+ + P^-$ равна единичному оператору.

Мы видим, что *X есть прямая сумма подпространств X^+ и X^-, а $P^{\pm}$ — взаимно дополнительные проекторы на эти подпространства*. Эти проекторы называют *проекторами Кальдерона*: аналогичные операторы были введены сначала в общей теории эллиптических задач Кальдероном [140].

Как нетрудно проверить, каждое из равенств (12.4.6) эквивалентно соотношениям

$$BA = A\widehat{B}, \quad HB = \widehat{B}H, \quad \frac{1}{4}I - B^2 = AH, \quad \frac{1}{4}I - (\widehat{B})^2 = HA. \tag{12.4.7}$$

Ср. с [87].

12.5. Сильная коэрцитивность форм и обратимость операторов A и H. Заметим сначала, что формулы (12.4.3) и (12.4.4) с верхними знаками можно переписать в виде

$$\Big(\frac{1}{2}I + B\Big)u^+ = AT^+u, \tag{12.5.1}$$

$$Hu^+ = \Big(\frac{1}{2}I - \widehat{B}\Big)T^+u \tag{12.5.2}$$

и те же формулы с нижними знаками — в виде

$$\Big(\frac{1}{2}I - B\Big)u^- = -AT^-u, \tag{12.5.3}$$

$$-Hu^- = \Big(\frac{1}{2}I + \widehat{B}\Big)T^-u. \tag{12.5.4}$$

Эти формулы тоже выражают связь между данными Коши решений однородной системы в Ω^+ и Ω^-.

Теорема 12.5.1. *Для формы оператора A справедливо сильное неравенство коэрцитивности*

$$\|\psi\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant C_1 \operatorname{Re}(A\psi, \psi)_\Gamma, \quad \psi \in H^{-1/2}(\Gamma), \tag{12.5.5}$$

так что A обратим как оператор из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$.

Доказательство. Положим $u = \mathcal{A}\psi$. Эта функция имеет одинаковые следы $u^{\pm}$ на Γ и принадлежит $H^1(\mathbb{T})$, и мы располагаем для нее неравенством сильной коэрцитивности на торе. Из формул Грина при $Lu = 0$ в $\Omega^{\pm}$ и второй формулы скачков (12.3.10) выводим неравенство (ср. с оценками в п. 11.3)

$$\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant C_2 \|u\|_{H^1(\mathbb{T})}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\|\psi\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} &\leqslant C_2^2\|u\|^2_{H^1(\mathbb{T})} \leqslant \\ &\leqslant C_3\operatorname{Re}\Phi_{\mathbb{T}}(u,u) = C_3\operatorname{Re}\Phi_{\Omega^+}(u,u) + C_3\operatorname{Re}\Phi_{\Omega^-}(u,u) = \\ &= C_3\operatorname{Re}[(T^+u,u^+)_\Gamma - (T^-u,u^-)_\Gamma] = C_3\operatorname{Re}(\psi, A\psi)_\Gamma\end{aligned}$$

снова в силу формул Грина в $\Omega^\pm$ и второго соотношения скачков в (12.3.10). Это дает (12.5.5). Обратимость оператора A следует теперь из теоремы Лакса—Мильграма. Соответствующая форма — это $(A\psi,\psi)_\Gamma$. □

Теорема 12.5.2. *Из сильной коэрцитивности форм $\Phi_{\Omega^\pm}$ на $H^1(\Omega^\pm)$ следует сильное неравенство коэрцитивности для формы оператора H*

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant C_2\operatorname{Re}(H\varphi,\varphi)_\Gamma, \quad \varphi\in H^{1/2}(\Gamma), \tag{12.5.6}$$

и обратимость H как оператора из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Доказательство похоже на доказательство теоремы 12.5.1. Полагаем $u=\mathcal{B}\varphi$. В силу третьей формулы скачков норма $\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ оценивается через $\|u^\pm\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ и, значит, через $\|u\|_{H^1(\Omega^\pm)}$, а из формул Грина и из третьей и четвертой формул скачков следует, что

$$\Phi_{\Omega^+}(u,u) + \Phi_{\Omega^-}(u,u) = (H\varphi,\varphi)_\Gamma. \qquad \square$$

Следствие 12.5.3. *Решения задач Дирихле для однородной системы $Lu=0$ в $\Omega^\pm$ с условиями $u^\pm=g$ можно строить в виде потенциала простого слоя по формуле*

$$u = \mathcal{A}\psi, \quad \text{где } A\psi = g, \quad \text{т. е. } \psi = A^{-1}g, \tag{12.5.7}$$

а решения задач Неймана в $\Omega^\pm$ с условиями Неймана $T^\pm u=h$ — в виде потенциала двойного слоя по формуле

$$u = \mathcal{B}\varphi, \quad \text{где } H\varphi = -h, \quad \text{т. е. } \varphi = -H^{-1}h, \tag{12.5.8}$$

при предположении сильной коэрцитивноти форм $\Phi_{\Omega^\pm}$ на $H^1(\Omega^\pm)$.

Добавим, что *неравенства* (12.5.5) *и* (12.5.6) *можно переписать с обратными операторами*:

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant C_4\operatorname{Re}(A^{-1}\varphi,\varphi)_\Gamma, \tag{12.5.9}$$

$$\|\psi\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant C_5\operatorname{Re}(H^{-1}\psi,\psi)_\Gamma. \tag{12.5.10}$$

Если поверхность Γ и коэффициенты в L бесконечно гладкие, то A и H — сильно эллиптические псевдодифференциальные операторы на Γ соответственно порядков -1 и 1. Ср. с [221] и [79].

Теорема 12.5.4. *При предположении сильной коэрцитивности форм $\Phi_{\Omega^\pm}$ на $H^1(\Omega^\pm)$ операторы $\frac{1}{2}I \pm B$ в $H^{1/2}(\Gamma)$ и $\frac{1}{2}I \pm \widehat{B}$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$ обратимы.*

Доказательство. Проверим обратимость оператора $\frac{1}{2}I + B$. Допустим, что ядро этого оператора содержит функцию $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Примем ее за u^+. Тогда в силу (12.5.1) имеем $AT^+u = 0$. Но оператор A обратим. Поэтому $T^+u = 0$. В силу единственности для задачи Неймана в Ω^+ получаем $u = 0$ и $\varphi = 0$.

Из той же формулы (12.5.1) видно, что область значений оператора $\frac{1}{2}I + B$ — все пространство $H^{1/2}(\Gamma)$.

Мы показали, что оператор $\frac{1}{2}I + B$ обратим. Аналогично проверяется обратимость операторов $\frac{1}{2}I - B$ и $\frac{1}{2}I \pm \widehat{B}$. □

Следствие 12.5.5. Используя формулы (12.4.2), *при условии сильной коэрцитивности форм $\Phi_{\Omega^\pm}$ на $H^1(\Omega^\pm)$ можно строить решения задач Дирихле также в виде потенциалов двойного слоя по формуле*

$$u = \mathcal{B}\varphi, \ \text{где} \ \left(\mp\frac{1}{2}I + B\right)\varphi = g, \quad \text{т. е.} \ \varphi = \left(\mp\frac{1}{2}I + B\right)^{-1} g, \tag{12.5.11}$$

и решения задач Неймана в виде потенциалов простого слоя по формуле

$$u = \mathcal{A}\psi, \ \text{где} \ \left(\pm\frac{1}{2}I + \widehat{B}\right)\psi = h, \quad \text{т. е.} \ \psi = \left(\pm\frac{1}{2}I + \widehat{B}\right)^{-1} h. \tag{12.5.12}$$

Если поверхность Γ и коэффициенты оператора L бесконечно гладкие, то $\frac{1}{2}I \pm B$ и $\frac{1}{2}I \pm \widehat{B}$ — эллиптические псевдодифференциальные операторы нулевого порядка.

Замечание 12.5.6. Укажем еще один подход к доказательству обратимости операторов $\frac{1}{2}I \pm B$ и $\frac{1}{2}I \pm \widehat{B}$. Он состоит в том, что формулы (12.5.1)—(12.5.4) и только что полученные результаты для операторов A и H комбинируются с результатами для операторов D и N из п. 11.3.

Например, рассмотрим оператор $\frac{1}{2}I - \widehat{B}$. Из формулы (12.5.2) следует, что

$$(Hu^+, u^+)_\Gamma = \left(\left(\frac{1}{2}I - \widehat{B}\right)T^+u, u^+\right)_\Gamma = \left(\left(\frac{1}{2}I - \widehat{B}\right)D^+u^+, u^+\right)_\Gamma.$$

Из (12.5.6) получаем *неравенство сильной коэрцитивности* для формы оператора $\left(\frac{1}{2}I-\widehat{B}\right)D^+$:

$$\operatorname{Re}\left(\left(\frac{1}{2}I-\widehat{B}\right)D^+\varphi,\varphi\right)_\Gamma \geqslant c\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}, \tag{12.5.13}$$

$c>0$. Значит, это обратимый оператор из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$. Но D^+ — тоже обратимый оператор из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$. Значит, $\frac{1}{2}I-\widehat{B}$ — обратимый оператор в $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Ср. с формулами (12.6.1), а также с работой [221, с. 59].

12.6. Связи между операторами на границе.

Предложение 12.6.1. *Справедливы соотношения*

$$\begin{gathered} A^{-1}=D^++D^-,\quad H^{-1}=N^++N^-,\quad N^\pm=\left(\frac{1}{2}I\pm B\right)^{-1}A, \\ D^\pm=\left(\frac{1}{2}I\mp\widehat{B}\right)^{-1}H. \end{gathered} \tag{12.6.1}$$

Более точно, первое из них следует из сильной коэрцивности формы $\Phi_{\mathbb{T}}$ на $H^1(\mathbb{T})$, а остальные имеют место при сильной коэрцитивности форм $\Phi_{\Omega^\pm}$ на $H^1(\Omega^\pm)$.

Доказательство. Мы имеем при совпадающих $u^\pm$ в силу (12.3.4)

$$u^\pm=-A[Tu]_\Gamma=A(D^++D^-)u^\pm. \tag{12.6.2}$$

Поэтому D^++D^- — правый обратный к оператору A. Но A обратим, поэтому это и левый обратный. Впрочем, формула

$$(D^++D^-)A\psi=\psi \tag{12.6.3}$$

следует и из второй формулы скачков в (12.3.10).

Аналогично при совпадающих $T^\pm u$ из (12.3.4) получаем

$$T^\pm u=-H[u]_\Gamma=H(N^++N^-)T^\pm u. \tag{12.6.4}$$

Значит, N^++N^- — правый обратный к H. Но H — обратимый оператор, значит, это и левый обратный. Впрочем, формула

$$(N^++N^-)H\varphi=\varphi \tag{12.6.5}$$

следует также из определения оператора H и третьей формулы скачков.

Остальные соотношения в (12.6.1) следуют из (12.5.1)—(12.5.4). □

В частности, видно, что операторы $N^+ + N^-$ и $D^+ + D^-$ обратимы. При этом последний оператор обратим в силу сильной коэрцитивности формы $\Phi_{\mathbb{T}}$ на $H^1(\mathbb{T})$. Любопытно отметить, что для обратимости оператора $D^+ + D^-$ существование операторов N^+ и N^- не требуется.

12.7. Соотношения дуальности на Г. Здесь мы выведем три полезные формулы. В них операторы $\widetilde{A}$, $\widetilde{H}$ и $\widetilde{B}$ отвечают формально сопряженному к L оператору $\widetilde{L}$.

Полагая $u = \mathcal{A}\psi_1$, $v = \widetilde{\mathcal{A}}\psi_2$, $\psi_j \in H^{-1/2}(\Gamma)$, из вторых формул Грина в $\Omega^\pm$ и первых двух соотношений скачков в (12.3.10) получаем формулу

$$(A\psi_1, \psi_2)_\Gamma = (\psi_1, \widetilde{A}\psi_2)_\Gamma. \tag{12.7.1}$$

Аналогично, полагая $u = \mathcal{B}\varphi_1$, $v = \widetilde{\mathcal{B}}\varphi_2$, $\varphi_j \in H^{1/2}(\Gamma)$, из тех же формул Грина и последних двух соотношений скачков получаем

$$(H\varphi_1, \varphi_2)_\Gamma = (\varphi_1, \widetilde{H}\varphi_2)_\Gamma. \tag{12.7.2}$$

Теперь докажем формулу

$$(\widehat{B}\psi, \varphi)_\Gamma = (\psi, \widetilde{B}\varphi)_\Gamma. \tag{12.7.3}$$

Для этого положим $u = \mathcal{A}\psi$, $v = \widetilde{\mathcal{B}}\varphi$ $(\psi \in H^{-1/2}(\Gamma),\ \varphi \in H^{1/2}(\Gamma))$. Из второй формулы Грина в Ω^+

$$(T^+u, v^+)_\Gamma = (u^+, \widetilde{T}^+v)_\Gamma,$$

что дает (читателю надо найти нужные формулы в предыдущих пунктах)

$$\Big(\frac{1}{2}\psi + \widehat{B}\psi, -\frac{1}{2}\varphi + \widetilde{B}\varphi\Big)_\Gamma = (A\psi, -\widetilde{H}\varphi)_\Gamma. \tag{12.7.4}$$

Аналогично из второй формулы Грина в Ω^- имеем

$$-(T^-u, v^-)_\Gamma = -(u^-, \widetilde{T}^-v)_\Gamma,$$

что дает

$$-\Big(-\frac{1}{2}\psi + \widehat{B}\psi, \frac{1}{2}\varphi + \widetilde{B}\varphi\Big)_\Gamma = -(A\psi, -\widetilde{H}\varphi)_\Gamma. \tag{12.7.5}$$

Складывая формулы (12.7.4) и (12.7.5), получаем (12.7.3).

12.8. Задачи с граничными условиями на незамкнутой поверхности. Здесь мы рассмотрим систему $Lu = 0$ на торе $\mathbb{T}$ с граничными условиями на незамкнутой $(n-1)$-мерной липшицевой поверхности $\Gamma_1 \subset \mathbb{T}$ с $(n-2)$-мерным липшицевым краем $\partial\Gamma_1$ $(n \geqslant 2)$, который в Γ_1 не включается. Более точно, мы будем считать, что Γ_1 — открытая часть замкнутой липшицевой поверхности Γ, делящей тор на две области $\Omega^\pm$, и что граница $\partial\Gamma_1$ делит Γ на две области, Γ_1 и Γ_2. В выборе дополнительной части Γ_2 поверхности Γ имеется очевидный произвол. Стороны поверхности Γ, обращенные к $\Omega^\pm$, обозначим через $\Gamma^\pm$. Аналогично определим $\Gamma_1^\pm$. Граничные условия или условия сопряжения будут задаваться на $\Gamma_1^\pm$. Нормаль в точках на Γ, как и раньше, направлена в Ω^-.

Пусть $\Omega_0 = \mathbb{T} \setminus \overline{\Gamma}_1$. Заметим, что эта область не является липшицевой.

Определим *пространство* $H^1(\Omega_0)$ сначала стандартным образом.

Определение 1. *Пространство* $H^1(\Omega_0)$ состоит из таких принадлежащих L_2 в области Ω_0 функций u, что все их первые производные $\partial_j u$ в смысле обобщенных функций в этой области тоже принадлежат L_2. Норма определяется стандартной формулой

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega_0)} = \|u\|^2_{L_2(\Omega_0)} + \sum \|\partial_j u\|^2_{L_2(\Omega_0)}. \tag{12.8.1}$$

Теперь дадим второе определение.

Определение 2. *Пространство* $H^1(\Omega_0)$ состоит из функций, принадлежащих $L_2(\Omega_0)$, сужения которых на $\Omega^\pm$ принадлежат $H^1(\Omega^\pm)$, причем следы этих функций на $\Gamma^\pm$ (они принадлежат $H^{1/2}(\Gamma)$) совпадают на Γ_2. При этом

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega_0)} = \|u\|^2_{H^1(\Omega^+)} + \|u\|^2_{H^1(\Omega^-)}. \tag{12.8.2}$$

Предложение 12.8.1. *Определения* 1 *и* 2 *эквивалентны.*

Доказательство. Очевидно, что $H^1(\Omega_0)$ в смысле первого определения содержится в $H^1(\Omega_0)$ в смысле второго. В обратную сторону утверждение следует из формулы интегрирования по частям для функций из H^1 в липшицевой области (см. предложение 9.3.3): если написать ее в $\Omega^\pm$ для функции u, принадлежащей $H^1(\Omega_0)$ в смысле второго определения, и основной функции из $C_0^\infty(\Omega_0)$, то после сложения этих формул члены на Γ_2 сокращаются. Поэтому первые производные в $\Omega^\pm$ вместе определяют первые производные в Ω_0. Ср. с нашим п. 3.5 о склеивании функций в полупространствах.

Нормы (12.8.1) и (12.8.2) совпадают, если нормы в $H^1(\Omega^\pm)$ определить формулами вида (12.8.1). □

Из первого определения видно, что пространство $H^1(\Omega_0)$ не зависит от выбора поверхности Γ_2. Из второго определения видно, что скачок $[u]_\Gamma$ функции u из $H^1(\Omega_0)$ равен нулю на Γ_2, т. е. принадлежит $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$.

Предложение 12.8.2. *Пусть u — решение системы $Lu=0$ в Ω_0, принадлежащее $H^1(\Omega_0)$. Тогда скачок $[Tu]_\Gamma$ равен нулю на Γ_2, так что этот скачок принадлежит $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$.*

Доказательство. Пусть Ω^0 — малый шар с центром в точке на Γ_2, лежащий внутри Ω_0, и v — функция из $\widetilde{H}^1(\Omega^0)$, продолженная нулем вне Ω^0. Тогда $(Lu,v)_{\Omega^0}=0$ и граничный член в формуле Грина для Ω^0 тоже равен нулю, так что $\Phi_{\Omega^0}(u,v)=0$. Запишем теперь формулы Грина для этих функций в $\Omega^\pm\cap\Omega^0$. Складывая их, получаем, что $([Tu]_\Gamma, v^+)_{\Gamma_2}=0$. Ввиду произвола в выборе v на пересечении шара с Γ_2 получаем, что $[Tu]_\Gamma=0$ на этом пересечении. Значит, этот скачок нулевой на Γ_2. □

Мы рассмотрим следующие четыре задачи для системы $Lu=0$ в Ω_0.

I. Задача Дирихле с условиями

$$u^\pm = g^\pm \ \text{ на } \ \Gamma_1^\pm, \tag{12.8.3}$$

где $g^\pm\in H^{1/2}(\Gamma_1)$ и $[g]_{\Gamma_1}=g^- - g^+\in\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$.

II. Задача Неймана с условиями

$$T^\pm u = h^\pm \ \text{ на } \ \Gamma_1^\pm, \tag{12.8.4}$$

где $h^\pm\in H^{-1/2}(\Gamma_1)$ и $[h]_{\Gamma_1}\in\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$.

III. Задача сопряжения с условиями

$$[u]_{\Gamma_1} = g, \quad [Tu]_{\Gamma_1} = h \ \text{ на } \ \Gamma_1. \tag{12.8.5}$$

Здесь $g\in\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$, $h\in\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$.

IV. Смешанная задача с условиями

$$u^+ = g \ \text{ на } \ \Gamma_1^+, \quad T^- u = h \ \text{ на } \ \Gamma_1^-. \tag{12.8.6}$$

Здесь $g\in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $h\in H^{-1/2}(\Gamma_1)$.

В этих постановках существенны предположения о данных на Γ_1.

Подобные задачи возникают в электростатике, электродинамике и акустике, в этом случае L — оператор Лапласа или Гельмгольца и Γ_1 — незамкнутый экран. Они возникают также в теории упругости, в этом случае $Lu=0$ — одна из систем теории упругости и Γ_1 моделирует трещину.

Начнем с задачи III.

Теорема 12.8.3. *Задача* III *однозначно разрешима, и формула*

$$u=\mathcal{B}[u]_{\Gamma_1}-\mathcal{A}[Tu]_{\Gamma_1} \tag{12.8.7}$$

выражает ее решение.

Доказательство. По существу это просто следствие теоремы 12.3.7. Если дано решение задачи III, то оно записывается формулой (12.3.13) со скачками на Γ_1 (продолженными нулем на Γ_2), т. е. формулой (12.8.7).

И наоборот, если u — функция, определяемая этой формулой, то это решение системы $Lu=0$ вне $\overline{\Gamma}_1$, принадлежащее $H^1(\Omega_0)$: оно принадлежит $H^1(\Omega^{\pm})$, и скачки равны нулю на Γ_2 (см. определение 2 и предложение 12.8.2). □

Ниже в этом пункте мы можем пользоваться формулой (12.8.7) вместо (12.3.13).

Далее наши рассмотрения будут похожи на рассмотрения смешанных задач в п. 11.4 с использованием операторов D_1 и N_1.

Рассмотрим задачу Дирихле I.

Введем операторы

$$\begin{gathered}A_1\psi=(A\psi)|_{\Gamma_1},\quad B_1\varphi=(B\varphi)|_{\Gamma_1}\\ (\psi\in\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1),\ \varphi\in\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)).\end{gathered} \tag{12.8.8}$$

Очевидно, что A_1 — ограниченный оператор из $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$ в $H^{1/2}(\Gamma_1)$ и B_1 — ограниченный оператор из $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$ в $H^{1/2}(\Gamma_1)$.

Переходя в формуле (12.8.7) с двух сторон на Γ_1, складывая получающиеся соотношения и деля на 2, получаем (см. (12.4.2)) уравнение относительно $\psi=[Tu]_{\Gamma_1}$:

$$g=B_1\varphi-A_1\psi,\quad \text{где } g=\frac{1}{2}(g^++g^-),\quad \varphi=g^--g^+. \tag{12.8.9}$$

Теорема 12.8.4. *Для формы оператора A_1 справедливо сильное неравенство коэрцитивности*

$$\|\psi\|^2_{\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)}\leqslant C_1\operatorname{Re}(A_1\psi,\psi)_{\Gamma_1},\quad \psi\in\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1), \tag{12.8.10}$$

и этот оператор обратим.

Доказательство аналогично доказательству теорем 11.4.2 и 11.4.3. Сильное неравенство Гординга для оператора A, см. (12.5.5), наследуется оператором A_1. Обратимость следует из теоремы Лакса—Мильграма. □

Теорема 12.8.5. *Задача Дирихле в постановке* I *имеет одно и только одно решение, принадлежащее* $H^1(\Omega_0)$.

Действительно, скачок $\psi = [Tu]_{\Gamma_1}$ определяется по данным Дирихле из уравнения (12.8.9), после чего решение строится по формуле (12.8.7). При нулевых данных Дирихле это решение нулевое.

Перейдем к задаче Неймана II. Предполагая, что мы имеем неравенство (12.5.6), введем операторы

$$\begin{gathered} H_1\varphi = (H\varphi)|_{\Gamma_1}, \quad \widehat{B}_1\psi = (\widehat{B}\psi)_{\Gamma_1} \\ (\varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1),\ \psi \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)). \end{gathered} \tag{12.8.11}$$

Оператор H_1 действует ограниченным образом из $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$ в $H^{-1/2}(\Gamma_1)$, а оператор $\widehat{B}_1$ — из $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$ в $H^{-1/2}(\Gamma_1)$.

Вычислив конормальные производные от обеих частей формулы (12.8.7) с двух сторон на Γ_1, сложив и разделив на 2, получим уравнение (см. (12.4.2)) относительно $\varphi = [u]_{\Gamma_1}$:

$$h = -H_1\varphi - \widehat{B}_1\psi, \quad \text{где } h = \frac{1}{2}(h^+ + h^-), \quad \psi = h^- - h^+. \tag{12.8.12}$$

Теорема 12.8.6. *Для формы оператора* H_1 *справедливо сильное неравенство коэрцитивности*

$$\|\varphi\|^2_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)} \leqslant C_2 \operatorname{Re}(H_1\varphi, \varphi)_{\Gamma_1}, \quad \varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1), \tag{12.8.13}$$

и этот оператор обратим.

Доказательство такое же, как доказательство теоремы 12.8.4. Используем неравенство (12.5.6) и теорему Лакса—Мильграма. □

Теперь аналогично теореме 12.8.5 получается

Теорема 12.8.7. *Задача Неймана в постановке* II *имеет одно и только одно решение, принадлежащее* $H^1(\Omega_0)$.

Наконец, рассмотрим задачу IV. Чтобы построить ее решение u, будем искать скачки

$$\varphi = [u]_{\Gamma_1} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1), \quad \psi = [Tu]_{\Gamma_1} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1). \tag{12.8.14}$$

Вычисляя конормальную производную функции (12.8.7) на Γ_1^- (см. (12.3.11) и (12.4.2)) и граничное значение этой функции на Γ_1^+ (см.

(12.4.2)), получаем уравнения

$$\begin{gathered} -H_1\varphi - \Big(-\frac{1}{2}I + \widehat{B}_1\Big)\psi = h, \\ \Big(-\frac{1}{2}I + B_1\Big)\varphi - A_1\psi = g. \end{gathered} \tag{12.8.15}$$

Уравнения удобно записать в этом порядке. Мы следуем работе [231] об уравнениях анизотропной упругости.

Оператор

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} H_1 & -\frac{1}{2}I + \widehat{B}_1 \\ \frac{1}{2}I - B_1 & A_1 \end{pmatrix} \tag{12.8.16}$$

действует ограниченным образом из пространства

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1) \times \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1) \tag{12.8.17}$$

в пространство

$$\mathcal{H} = H^{-1/2}(\Gamma_1) \times H^{1/2}(\Gamma_1). \tag{12.8.18}$$

Эти два пространства дуальны относительно продолжения скалярного произведения $(\varphi_1, \psi_1)_{\Gamma_1} + (\psi_2, \varphi_2)_{\Gamma_1}$ на их прямое произведение. Для столбца $U = (\varphi, \psi)'$ имеем

$$\begin{gathered} (\mathcal{T}U, U) = (H_1\varphi, \varphi)_{\Gamma_1} + \\ + \Big(\Big(-\frac{1}{2}I + \widehat{B}_1\Big)\psi, \varphi\Big)_{\Gamma_1} + \Big(\Big(\frac{1}{2}I - B_1\Big)\varphi, \psi\Big)_{\Gamma_1} + (A_1\psi, \psi)_{\Gamma_1}. \end{gathered} \tag{12.8.19}$$

Предположим, что L — формально самосопряженный оператор на торе. Тогда $\widetilde{B} = B$ и из формул (12.7.3) и (12.8.19) видно, что

$$\operatorname{Re}(\mathcal{T}U, U) = (H_1\varphi, \varphi)_{\Gamma_1} + (A_1\psi, \psi)_{\Gamma_1}, \tag{12.8.20}$$

остальное сокращается (знак Re справа сейчас не нужен). Воспользуемся теоремами 12.8.4 и 12.8.6. Получаем, что

$$\|U\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}} \leqslant C \operatorname{Re}(\mathcal{T}U, U).$$

Мы видим, что уравнение $\mathcal{T}U = F$, где F — столбец $(h, g)'$, однозначно разрешимо по теореме Лакса—Мильграма.

Этим доказана

Теорема 12.8.8. *При условии формальной самосопряженности оператора L задача* IV *однозначно разрешима.*

Отметим еще, что из формул (12.7.1) и (12.7.2) получаются формулы

$$(A_1\psi_1, \psi_2)_{\Gamma_1} = (\psi_1, \widetilde{A}_1\psi_2)_{\Gamma_1}, \tag{12.8.21}$$

где $\psi_j \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$, и

$$(H_1\varphi_1, \varphi_2)_{\Gamma_1} = (\varphi_1, \widetilde{H}_1\varphi_2)_{\Gamma_1}, \tag{12.8.22}$$

где $\varphi_j \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$.

12.9. Задачи со спектральным параметром в условиях сопряжения. Здесь мы кратко остановимся на следующих спектральных задачах.

7°. $Lu = 0$ в $\Omega^\pm$, $[u]_\Gamma = 0$, $[Tu]_\Gamma = -\lambda u^\pm$ на Γ. (12.9.1)

Из (12.3.12), (12.3.13) и второй формулы скачков в (12.3.10) видно, что на *собственных* функциях эта задача эквивалентна уравнению $A^{-1}\psi = \lambda\psi$, где $\psi = [Tu]_\Gamma$, $u = -\mathcal{A}\psi$.

8°. $Lu = 0$ в $\Omega^\pm$, $[Tu]_\Gamma = 0$, $T^\pm u = -\lambda[u]_\Gamma$ на Γ. (12.9.2)

На *собственных* функциях эта задача эквивалентна уравнению $H\varphi = \lambda\varphi$, где $\varphi = [u]_\Gamma$, $u = \mathcal{B}\varphi$. См. снова (12.3.12) — (12.3.13) и третью формулу скачков в (12.3.10).

Аналогичные задачи можно поставить с условиями сопряжения на Γ_1.

9°. $Lu = 0$ в Ω_0, $[u]_{\Gamma_1} = 0$, $[Tu]_{\Gamma_1} = -\lambda u^\pm$ на Γ_1. (12.9.3)

На *собственных* функциях эта задача эквивалентна уравнению $A_1^{-1}\psi = \lambda\psi$, где $\psi = [Tu]_{\Gamma_1}$.

10°. $Lu = 0$ в Ω_0, $[Tu]_{\Gamma_1} = 0$, $T^\pm u = -\lambda[u]_{\Gamma_1}$ на Γ_1. (12.9.4)

На *собственных* функциях эта задача эквивалентна уравнению $H_1\varphi = \lambda\varphi$, где $\varphi = [u]_{\Gamma_1}$.

Спектральные свойства операторов A, H, A_1 и H_1 аналогичны спектральным свойствам операторов N, D, N_1 и D_1 соответственно. Но для операторов A и A_1 асимптотические формулы для собственных значений удалось получить без предположения, что липшицева поверхность почти гладкая. Это сделали Розенблюм и Тащиян [292].

В случае оператора A, если оператор L близок к самосопряженному, мы можем оценить порядок оператора $A - A_0$ следующим образом. Мы имеем (см. формулу (12.2.4))

$$A - A_0 = \gamma(L^{-1} - L_0^{-1})\gamma^*.$$

Оператор γ^* действует ограниченным образом из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^{-1}(\mathbb{T})$. Далее, оператор

$$L^{-1} - L_0^{-1} = L^{-1}(L_0 - L)L_0^{-1}$$

действует ограниченным образом из $H^{-1}(\mathbb{T})$ в $H^2(\mathbb{T})$ (см. теорему 12.1.1). Но все лимитируется оператором γ, про который мы знаем, что он действует ограниченным образом из $H^{3/2-\varepsilon}(\mathbb{T})$ в $H^{1-\varepsilon}(\Gamma)$ при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$. Поэтому $A - A_0$ — ограниченный оператор из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^{1-\varepsilon}(\Gamma)$.

12.10. Более общие задачи сопряжения. Рассмотренные в предыдущих пунктах этого параграфа задачи сопряжения относились к *одной* сильно эллиптической системе, заданной на торе. Предположим теперь, что в областях $\Omega^\pm$ заданы *разные*, вообще говоря, сильно эллиптические операторы $L_\pm$. Это означает, что их коэффициенты $a_{j,k}$ и b_j с одинаковыми индексами не обязательно совпадают на границе. Будем предполагать, что соответствующие формы $\Phi_{\Omega^\pm}$ сильно коэрцитивны на $H^1(\Omega^\pm)$. Нас интересует задача, в которой ищется пара функций u в $\Omega^\pm$, подчиненных для простоты однородным системам

$$L_+ u = 0 \text{ в } \Omega^+, \quad L_- u = 0 \text{ в } \Omega^- \tag{12.10.1}$$

и условиям сопряжения: в этих условиях заданы скачки $[u]_\Gamma$ и $[Tu]_\Gamma$, но в последнем конормальные производные определяются заданными *разными* системами в $\Omega^\pm$. Такая задача сводится к двум: в первой только скачок $[Tu]_\Gamma$ ненулевой, а во второй только $[u]_\Gamma$. Поэтому рассмотрим две задачи:

I. $[u]_\Gamma = 0, \quad [Tu]_\Gamma = h$;

II. $[u]_\Gamma = g, \quad [Tu]_\Gamma = 0$.

Здесь $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ и $h \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Теорема 12.10.1. *При наших предположениях эти задачи однозначно разрешимы.*

Доказательство. Используя операторы Пуанкаре—Стеклова $N^\pm$ и $D^\pm$, связанные с $L_\pm$, имеем

$$N^\pm(T^\pm u) = \pm u^\pm, \quad D^\pm(u^\pm) = \pm T^\pm u$$

(см. (12.1.1)). В задаче I для $u^\pm = \varphi$ получаем уравнение

$$(D^+ + D^-)\varphi = -h. \tag{12.10.2}$$

В задаче II для $T^{\pm}u=\psi$ получаем уравнение

$$(N^{+}+N^{-})\psi = -g. \tag{12.10.3}$$

Операторы слева сильно коэрцитивны в следующем смысле (это следует из сказанного в п. 11.3 про операторы D и N):

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant C_1 \operatorname{Re}((D^{+}+D^{-})\varphi, \varphi)_\Gamma, \tag{12.10.4}$$

$$\|\psi\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant C_2 \operatorname{Re}((N^{+}+N^{-})\psi, \psi)_\Gamma. \tag{12.10.5}$$

Это позволяет применить теорему Лакса—Мильграма. Получаем, что первый оператор обратим как действующий из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$, а второй — как оператор, действующий в обратном направлении. Решения исходных задач строятся теперь как решения задач Дирихле или Неймана в $\Omega^{\pm}$. □

Можно рассмотреть и спектральные задачи:

7°°.

$$L_{\pm}u = 0 \ \text{в} \ \Omega^{\pm}, \quad [u]_\Gamma = 0, \quad [Tu]_\Gamma = -\lambda u^{\pm} \ \text{на} \ \Gamma. \tag{12.10.6}$$

8°°.

$$L_{\pm}u = 0 \ \text{в} \ \Omega^{\pm}, \quad [Tu]_\Gamma = 0, \quad T^{\pm}u = -\lambda [u]_\Gamma \ \text{на} \ \Gamma. \tag{12.10.7}$$

Задача. Проверьте, что первая из этих задач на собственных функциях эквивалентна уравнению

$$(D^{+}+D^{-})\varphi = \lambda\varphi, \quad \text{где} \ \varphi = u^{\pm}, \tag{12.10.8}$$

а вторая — уравнению

$$\psi = \lambda(N^{+}+N^{-})\psi, \quad \text{где} \ \psi = T^{\pm}u. \tag{12.10.9}$$

Эти результаты согласуются с результатами из п. 12.9 для рассмотренных там задач в силу формул из п. 12.6. Но сейчас вывести обратимость оператора $D^{+}+D^{-}$ из сильной коэрцитивности форм $\Phi_{\Omega^{\pm}}$ только на $\widetilde{H}^1(\Omega^{\pm})$ не удается.

Далее, мы можем получить для операторов $D^{+}+D^{-}$ и $N^{+}+N^{-}$ обычный набор спектральных свойств, включая спектральные асимптотики, если поверхность Γ почти гладкая и системы в $\Omega^{\pm}$ формально самосопряженные или имеют формально самосопряженные старшие части, расположение собственных значений, базисность или полноту корневых функций. На этом не останавливаемся.

12.11. Операторы A и H в более общих пространствах H^s. Мы уже отмечали в п. 12.2, что можем рассматривать операторы

$$\mathcal{A} = L^{-1}\gamma^* \quad \text{и} \quad A = \gamma L^{-1}\gamma^* \tag{12.11.1}$$

как действующие ограниченным образом из $H^{-1/2+s}(\Gamma)$ в $H^{1+s}(\Omega^\pm)$ и $H^{1/2+s}(\Gamma)$ соответственно при $|s| < 1/2$.

Напомним, что форма $\Phi_{\mathbb{T}}$ предполагается сильно коэрцитивной на $H^1(\mathbb{T})$. Согласно первой части теоремы 11.7.3 (пока не доказанной) операторы $\mathcal{L}_D^\pm$, отвечающие задачам Дирихле с однородными граничными условиями в $\Omega^\pm$, обратимы как операторы из $\widetilde{H}^{1+s}(\Omega^\pm)$ в $H^{-1+s}(\Omega^\pm)$ при $|s| < \varepsilon(L)$, где $\varepsilon(L)$ — некоторое число из $(0, 1/2]$, равное $1/2$ в случае формальной самосопряженности главной части оператора L. Просмотрим теперь рассуждения в п. 12.3 и следующих за ним, имея целью обобщение результатов на s с $|s| < \varepsilon(L)$.

Прежде всего на решения системы $Lu = 0$ в $\Omega^\pm$ из $H^{1+s}(\Omega^\pm)$ обобщаются формулы (12.3.8) и (12.3.9). Оператор $\mathcal{B}$ продолжается до ограниченного оператора из $H^{1/2+s}(\Gamma)$ в $H^{1+s}(\Omega^\pm)$.

Далее, обобщаются формулы скачков (12.3.10), поскольку для их доказательства нужна только однозначная разрешимость задач Дирихле. В этих формулах теперь $\varphi \in H^{1/2+s}(\Gamma)$ и $\psi \in H^{-1/2+s}(\Gamma)$. Затем на функции из этих пространств обобщается теорема 12.3.7, решение принадлежит $H^{1+s}(\Omega^\pm)$.

Операторы B и $\widehat{B}$, см. (12.4.1), теперь ограничены в $H^{1/2+s}(\Gamma)$ и $H^{-1/2+s}(\Gamma)$ соответственно. Сохраняются формулы (12.4.2)—(12.4.4). Операторы (12.4.5) — это теперь проекторы в $H^{1/2+s}(\Gamma) \times H^{-1/2+s}(\Gamma)$ на подпространства данных Коши для однородной системы в $\Omega^\pm$. Сохраняются формулы (12.4.7).

Формулы (12.6.2) и (12.6.3) сохраняются, они дают обратимость оператора A и первую из формул (12.6.1).

Теперь предположим сильную коэрцитивность форм $\Phi_{\Omega^\pm}$ на $H^1(\Omega^\pm)$. Тогда согласно второй части теоремы 11.7.3 операторы $\mathcal{L}_N^\pm$, отвечающие задачам Неймана с однородными граничными условиями, обратимы как операторы из $H^{1+s}(\Omega^\pm)$ в $\widetilde{H}^{-1+s}(\Omega^\pm)$ при $|s| < \varepsilon(L)$, где $\varepsilon(L)$ считаем тем же. Оно равно $1/2$, если L имеет формально самосопряженную главную часть и выполнено дополнительное условие (11.7.4) вблизи границы. Теперь мы можем пользоваться при этих s операторами $N^\pm$ и снова имеем формулы (12.6.4) и (12.6.5). Мы видим, что оператор H обратим при рассматриваемых s и справедлива вторая формула в (12.6.1).

Выделим наиболее важные результаты.

Теорема 12.11.1. *A — ограниченный обратимый оператор из $H^{-1/2+s}(\Gamma)$ в $H^{1/2+s}(\Gamma)$ при $|s| < \varepsilon(L)$, имеющий обратный $D^+ + D^-$. Если формы $\Phi_{\Omega^\pm}$ сильно коэрцитивны на $H^1(\Omega^\pm)$, то H — ограниченный обратимый оператор из $H^{1/2+s}(\Gamma)$ в $H^{-1/2+s}(\Gamma)$, имеющий обратный $N^- + N^+$. Здесь $\varepsilon(L) = 1/2$, если L имеет формально самосопряженную главную часть и выполнено дополнительное условие* (11.7.4) *вблизи границы.*

Рассмотрения в этом пункте будут дополнены в § 16.

Глава IV

Более общие пространства и их приложения

§ 13. Элементы теории интерполяции

13.1. Содержание параграфа. Пространства L_p.

1. Теоремы теории интерполяции применяются, в частности, в ситуациях следующего типа (пока мы описываем их очень приблизительно). Пусть имеются две пары банаховых пространств (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1) со свойствами, которые далее будут уточнены. По этим парам специальным образом строятся шкалы пространств $\{X_\theta\}$ и $\{Y_\theta\}$, $0 < \theta < 1$. Пусть, далее, имеется линейный оператор T, действующий непрерывно из X_0 в Y_0 и из X_1 в Y_1. Выясняется, что тогда он непрерывно действует из X_θ в Y_θ при $0 < \theta < 1$. Более того, иногда из дополнительной информации о свойствах этого оператора как действующего из X_0 в Y_0 и из X_1 в Y_1 (например, об обратимости) при дополнительных предположениях выводится аналогичная информация о его действии из X_θ в Y_θ. Часто это упрощает аналитические рассмотрения. В некоторых случаях это единственный известный способ получения нужных результатов, в некоторых других наиболее простой.

Эта теория возникла в прошлом веке. Первой была теорема М. Рисса (1926)—Торина (1938) об операторах в пространствах L_p. Об этих теоремах мы скажем несколько слов в следующем пункте. Основы абстрактной теории были разработаны в конце 50-х — начале 60-х гг. в статьях Кальдерона, С. Крейна, Лионса, Петре, Ароншайна, Гальярдо и других математиков. Статей много, мы укажем только некоторые из них. Первые монографии [6], [25] и [52] появились в 1976—79 гг. Развитие теории продолжалось, и сейчас это самостоятельное направление в функциональном анализе с важными приложениями, в частности, к теории общих банаховых и функциональных пространств, теории дифференциальных и интегральных уравнений и теории приближений. В обширном обзоре [123] библиография состоит из 786 названий. Упомянем также монографии [68], [69], [70], [85] и обзор [135]. Многие важные результаты принадлежат российским математикам.

В этом параграфе доказывается только несколько теорем (на наш взгляд, особенно важных), но мы постараемся прокомментировать весь излагаемый материал. Многие опущенные доказательства можно найти в [6], [52] и [25], но некоторые теоремы появились позднее, и в этих случаях мы ссылаемся на журнальную литературу.

Предупредим читателя, что мы не стремимся к максимальной общности утверждений. Отобран материал, который, по опыту автора, определенно полезен для применения к эллиптическим уравнениям в частных производных. Усиления, варианты и другой дополнительный материал можно искать в цитируемой нами литературе. Наш краткий обзор затрагивает только основы теории интерполяции. Ср. с [87], Appendix B.

2. Пространства L_p затрагивались в предыдущих параграфах. Хотя читатель скорее всего свободно владеет нужной информацией о них, здесь приводится краткая сводка свéдений об этих пространствах. (Для справок можно использовать, например, книгу [17, т. I]).

Если U — область в $\mathbb{R}^n$, то *пространство* $L_p(U)$ при $1 \leqslant p < \infty$ есть сепарабельное банахово пространство, состоящее из измеримых функций $u(x)$ на U с конечной нормой

$$\|u\|_{L_p(U)} = \Bigl(\int_U |u(x)|^p\,dx\Bigr)^{1/p}. \tag{13.1.1}$$

Неравенство треугольника для этой нормы называется *неравенством Минковского*. При $1 < p < \infty$ для функций $u \in L_p(U)$, $v \in L_{p'}(U)$, $p + p' = pp'$, справедливо *неравенство Гёльдера*

$$\Bigl|\int_U u(x)\overline{v(x)}\,dx\Bigr| \leqslant \|u\|_{L_p(U)}\|v\|_{L_{p'}(U)}. \tag{13.1.2}$$

При $1 < p < \infty$ пространства $L_p(U)$ и $L_{p'}(U)$ взаимно сопряжены относительно продолжения на их прямое произведение скалярного произведения в $L_2(U)$.

Пространство $L_\infty(U)$ состоит из ограниченных измеримых функций в U с конечной нормой

$$\|u\|_{L_\infty(U)} = \inf_X \sup_{x \in X} |u(x)|, \tag{13.1.3}$$

где верхние грани берутся по подмножествам $X \subset U$ полной меры. При $p = 1$ под p' надо понимать ∞. Пространство $L_\infty(U)$ тоже банахово и является сопряженным к $L_1(U)$, но не сепарабельно, и эти два пространства не рефлексивны. Линеал $C_0^\infty(U)$ плотен в $L_p(U)$ при $1 \leqslant p < \infty$.

Оператор умножения на функцию из $L_\infty(U)$ является мультипликатором в любом $L_p(U)$.

Вместо области U можно рассматривать пространство U с положительной мерой (не будем останавливаться на уточнениях). Тогда, в частности, оказывается охваченным пространство l_p числовых последовательностей $\{u_k\}_1^\infty$ с нормой

$$\|u\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^\infty |u_k|^p\right)^{1/p} \tag{13.1.4}$$

при $1 \leqslant p < \infty$. Здесь мера сосредоточена в точках $k \in \mathbb{N}$. При этих p в l_p плотны финитные последовательности (в которых число ненулевых u_k конечно). Пространство l_∞ состоит из ограниченных последовательностей с нормой $\|u\|_{l_\infty} = \sup |u_k|$. Отметим также, что вместо пространств $L_p(U)$ числовых функций можно рассматривать пространства функций $L_p(U, X)$ на U со значениями в банаховом пространстве X. Эти два возможных обобщения следует иметь в виду ниже в этом параграфе там, где мы говорим об L_p.

Пространства L_p рассматривают и при $0 < p < 1$, но в этом случае они являются только *квазинормированными*, точнее, *квазибанаховыми* (есть полнота). *Квазинорма* $\|u\|$ отличается от нормы дополнительным множителем справа в неравенстве треугольника:

$$\|u+v\| \leqslant C(\|u\| + \|v\|). \tag{13.1.5}$$

3. Мы рассказываем об основных фактах теории интерполяции на базе примеров в рамках пространств H^s, теория которых уже построена в предыдущих параграфах, и пространств L_p. На самом деле теория интерполяции тем более содержательна, чем шире класс рассматриваемых пространств, которые часто «подбираются» под рассматриваемую аналитическую задачу. Напомним, что в § 14 будут кратко рассмотрены пространства H_p^s и B_p^s. Там мы приведем интерполяционные соотношения для этих пространств. В этих пространствах индекс s играет такую же роль, как в пространствах H^s, а индекс p аналогичен индексу p в L_p.

Во всех случаях совпадения или равенства пространств в этом параграфе подразумевается эквивалентность норм в этих пространствах, хотя иногда удается установить равенство норм. Во всех случаях вложения одного пространства в другое подразумевается непрерывность этого вложения. Все банаховы пространства рассматриваются над полем комплексных чисел.

13.2. Исходные определения и комплексный метод интерполяции.

13.2a. Пусть $X=(X_0, X_1)$ — пара банаховых пространств. Она называется *интерполяционной*, если они оба непрерывно и линейно вложены в некоторое хаусдорфово, или отделимое[1], топологическое линейное пространство $\mathcal{X}$. (Другие названия: *банахова пара, совместимые банаховы пространства*.) Это позволяет рассматривать линейные комбинации элементов из X_0 и X_1. В линейных пространствах $\Sigma(X)=X_0+X_1$ и $\Delta(X)=X_0\cap X_1$ вводятся нормы

$$\|x\|_{\Sigma(X)}=\inf\{\|x_0\|_{X_0}+\|x_1\|_{X_1}: x=x_0+x_1,\ x_0\in X_0,\ x_1\in X_1,\} \quad (13.2.1)$$

и

$$\|x\|_{\Delta(X)}=\max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}. \quad (13.2.2)$$

Как несложно проверить, получаются банаховы пространства. Очевидно, что $\Delta(X)\subset X_j\subset\Sigma(X)$. Часто предполагают, что $\Delta(X)$ плотно в X_0 и X_1. *Мы условимся это предполагать, если не оговаривается противное.* Если X_1 (непрерывно) вложено в X_0, то $X_1=\Delta(X)$, $X_0=\Sigma(X)$ и в качестве объемлющего пространства можно взять X_0. В общем случае $\Sigma(X)$ — наименьшее объемлющее пространство.

Прежде всего строятся промежуточные, или интерполяционные, пространства. Основные методы для этого — комплексный и вещественный методы интерполяции; мы хотим их описать. Итак, пусть $X=(X_0, X_1)$ — интерполяционная пара.

13.2b. Определим *комплексный метод интерполяции*. Он предложен Кальдероном [211] и Лионсом [262], а также в близкой форме С. Г. Крейном (в терминах «аналитических шкал», см. [25] и приведенные там ссылки). Предварительно заметим, что для функций скалярного переменного $f(z)$ со значениями в банаховом пространстве определяются понятия ограниченности, непрерывности и аналитичности — нужно только модуль заменять нормой. Для аналитических, или голоморфных, функций доказываются, в частности, интегральная формула Коши и принцип максимума модуля, см. [17, т. I, гл. III, § 4], или [58, гл. III].

[1] Любые две разные точки имеют непересекающиеся окрестности.

Пусть S и S_0 — замкнутая и открытая вертикальные полосы ширины 1 на комплексной плоскости:

$$S = \{z\colon 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1\}, \quad S_0 = \{z\colon 0 < \operatorname{Re} z < 1\}. \tag{13.2.3}$$

Обозначим через $F(X)$ пространство функций f на S со значениями в $\Sigma(X)$, которые:

1) в S_0 голоморфны (т. е. локально разлагаются в ряды Тейлора, сходящиеся по норме в $\Sigma(X)$);

2) в S непрерывны и ограничены;

3) на краях этой полосы имеют значения соответственно в X_0 слева и в X_1 справа, непрерывны там по $\operatorname{Im} z$ и стремятся к нулю при $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$.

Очевидно, что $F(X)$ — линейное пространство. Норма в нем определяется формулой

$$\|f\|_{F(X)} = \max\bigl\{\sup_t \|f(it)\|_{X_0},\ \sup_t \|f(1+it)\|_{X_1}\bigr\}. \tag{13.2.4}$$

(Здесь можно написать и max вместо sup.) Получается, как можно проверить, банахово пространство.

Комплексное интерполяционное пространство $X_\theta = [X_0, X_1]_\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, определяется как состоящее из всех таких $x \in \Sigma(X)$, что $x = f(\theta)$ для некоторой функции $f \in F(X)$. Норма в X_θ определяется равенством

$$\|x\|_{X_\theta} = \inf\bigl\{\|f\|_{F(X)} \colon f \in F(X),\ f(\theta) = x\bigr\}. \tag{13.2.5}$$

Проверяется, что это тоже банахово пространство.

Все пространства $[X_0, X_1]_\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, содержат $\Delta(X)$ и содержатся в $\Sigma(X)$. При нашем предположении о плотности $\Delta(X)$ в X_0 и в X_1 пространства $[X_0, X_1]_0$ и $[X_0, X_1]_1$ совпадают соответственно с исходными пространствами X_0 и X_1.

Отметим еще следующие свойства пространств X_θ.

1. $[X_0, X_1]_\theta = [X_1, X_0]_{1-\theta}$.

2. $\Delta(X)$ плотно во всех X_θ.

3. Если $X_1 \subset X_0$, то при $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ имеем $X_1 \subset X_{\theta_1} \subset X_{\theta_0} \subset X_0$, при этом каждое предыдущее пространство плотно в следующем.

4. Если X_0 и X_1 совпадают, то совпадают все X_θ.

Приведем основную теорему о комплексном методе интерполяции. Пусть $X = (X_0, X_1)$ и $Y = (Y_0, Y_1)$ — две интерполяционные пары и T — линейный ограниченный оператор из $\Sigma(X)$ в $\Sigma(Y)$. Обозначим через T_θ его сужение на X_θ. Эти обозначения будут использоваться и в дальнейшем.

Теорема 13.2.1. *Пусть* T_0 *— ограниченный оператор из* X_0 *в* Y_0 *с нормой* M_0 *и* T_1 *— ограниченный оператор из* X_1 *в* Y_1 *с нормой* M_1. *Тогда* T_θ *— ограниченный оператор из* X_θ *в* Y_θ $(0<\theta<1)$. *При этом для его нормы* M_θ *справедлива оценка*

$$M_\theta \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}. \tag{13.2.6}$$

Доказательство. Пусть x — элемент из X_θ, $y = Tx$, ε — произвольно малое положительное число и $f(z)$ — такая функция из $F(X)$, что $f(\theta)=x$ и $\|f\|_{F(X)} \leqslant \|x\|_{X_\theta} + \varepsilon$. Рассмотрим функцию

$$g(z) = M_0^{z-\theta} M_1^{\theta-z} Tf(z), \quad z \in S. \tag{13.2.7}$$

(Вообще, доказательства основных утверждений о комплексном методе интерполяции обычно требуют подбора подходящих функций комплексного переменного.) Несложно проверяется, что она принадлежит $F(Y)$. При этом

$$g(\theta) = Tf(\theta) = Tx = y.$$

Далее,

$$\|g(it)\|_{Y_0} \leqslant M_0^{-\theta} M_1^{\theta} M_0 \|f(it)\|_{X_0} \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} (\|x\|_{X_\theta} + \varepsilon),$$
$$\|g(1+it)\|_{Y_1} \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta-1} M_1 \|f(1+it)\|_{X_1} \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} (\|x\|_{X_\theta} + \varepsilon).$$

Мы видим, что $y \in Y_\theta$ и справедлива оценка (13.2.6). □

Переход от интерполяционной пары к промежуточным пространствам называется *интерполяционным функтором*. (Точное определение см. в [6] или [52].) В данном случае это переход от пары X к пространствам X_θ. Если

$$\|T_\theta\| \leqslant C \max(\|T_0\|, \|T_1\|), \tag{13.2.8}$$

где постоянная C не зависит от оператора T, то интерполяционный функтор называют *равномерным*; в данном случае мы имеем равномерный функтор с $C=1$. Справедливость неравенства (13.2.6) выражают словами: этот функтор *точный типа* θ. Эта оценка означает логарифмическую выпуклость нормы $\|T_\theta\|$ (т. е. выпуклость вниз графика логарифма от этой нормы).

Замечание. Часто встречаются ситуации, когда первоначально T задан и ограничен только как оператор из X_0 в Y_0 и из X_1

в Y_1. Пусть это операторы T_0 и T_1. Чтобы их можно было корректно продолжить до ограниченного оператора из $\Sigma(X)$ в $\Sigma(Y)$, надо предположить, что $T_0 = T_1$ на $\Delta(X)$. Это условие назовем *условием согласованности* операторов T_0 и T_1. Достаточно предположить совпадение этих операторов на плотном в $\Delta(X)$ подмножестве. Если же, скажем, $X_1 \subset X_0$, $Y_1 \subset Y_0$, то условие согласованности сводится к условию $T_1 = T_0|_{X_1}$.

Поясним, что при условии согласованности оператор T на $\Sigma(X)$ корректно определяется формулой

$$Tx = T_0x_0 + T_1x_1 \quad (x = x_0 + x_1,\ x_0 \in X_0,\ x_1 \in X_1).$$

Этот оператор действует из $\Sigma(X)$ в $\Sigma(Y)$, и его норма не превосходит $\max(\|T_0\|, \|T_1\|)$: в этом можно убедиться, подбирая для x слагаемые x_0 и x_1 так, что

$$\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} \leqslant \|x\|_{\Sigma(X)} + \varepsilon$$

при наперед заданном сколь угодно малом $\varepsilon > 0$.

13.2c. Приведем два важнейших примера. В них под U можно понимать, в частности, $\mathbb{R}^n$, или полупространство, или ограниченную область (например, с липшицевой границей), или компактное многообразие с краем или без края, именно эти случаи нам особенно интересны.

Теорема 13.2.2. 1°. *При любых вещественных $s_0 \neq s_1$ пространства $H^{s_0}(U)$ и $H^{s_1}(U)$ образуют интерполяционную пару. При этом*

$$[H^{s_0}(U), H^{s_1}(U)]_\theta = H^s(U), \tag{13.2.9}$$

где

$$s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1. \tag{13.2.10}$$

В частности,

$$[H^0(U), H^1(U)]_\theta = H^\theta(U). \tag{13.2.11}$$

2°. *Пространства $L_{p_0}(U)$ и $L_{p_1}(U)$ при любых $p_0 \neq p_1$ из $[1, \infty]$ образуют интерполяционную пару. При этом*

$$[L_{p_0}(U), L_{p_1}(U)]_\theta = L_p(U), \tag{13.2.12}$$

где

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}. \tag{13.2.13}$$

Отметим, что в примере 2° не выполнено предположение о плотности $\Delta(X)$, если один из индексов — бесконечность.

Доказательство формулы (13.2.11) для $U=\mathbb{R}^n$. Как мы знаем, пространства $H^s=H^s(\mathbb{R}^n)$ изоморфны пространствам $\widehat{H}^s=\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n)$ (см. п. 1.1). Поэтому достаточно доказать аналогичную формулу для пространств $\widehat{H}^s$. (Этим дело сводится к рассмотрению более простых пространств — весовых L_2-пространств.) Для простоты будем считать, что $s_0=0$, $s_1=1$. Рассмотрим пару $X=(X_0,X_1)$, где $X_0=\widehat{H}^0$ и $X_1=\widehat{H}^1$. Достаточно проверить неравенства

$$\|v(\xi)\|_{X_\theta}\leqslant\|v(\xi)\|_{\widehat{H}^\theta}\quad \text{и}\quad \|v(\xi)\|_{\widehat{H}^\theta}\leqslant\|v(\xi)\|_{X_\theta} \tag{13.2.14}$$

для функций $v(\xi)$ соответственно из $\widehat{H}^\theta$ и из X_θ.

Пусть $v(\xi)$ принадлежит $\widehat{H}^\theta$, т. е. $(1+|\xi|^2)^{\theta/2}v(\xi)\in\widehat{H}^0=L_2$. Взяв сколь угодно малое число $\varepsilon>0$, положим

$$f(z)=f(z,\xi)=\exp(\varepsilon z^2-\varepsilon\theta^2)(1+|\xi|^2)^{-z/2}(1+|\xi|^2)^{\theta/2}v(\xi). \tag{13.2.15}$$

Эта функция определена так, что $f(\theta)=v(\xi)$ и она принадлежит $F(X)$. При этом

$$\|f(it)\|_{L_2}\leqslant\exp(-\varepsilon t^2)\|(1+|\xi|^2)^{\theta/2}v(\xi)\|_{L_2}\leqslant\|v\|_{\widehat{H}^\theta},$$
$$\|f(1+it)\|_{\widehat{H}^1}\leqslant\exp(\varepsilon(1-t^2))\|(1+|\xi|^2)^{(\theta-1+1)/2}v(\xi)\|_{L_2}\leqslant e^\varepsilon\|v\|_{\widehat{H}^\theta}.$$

Это приводит к неравенству

$$\|v(\xi)\|_{X_\theta}\leqslant e^\varepsilon\|v(\xi)\|_{\widehat{H}^\theta}$$

и, значит, к первому из неравенств (13.2.14).

Чтобы получить второе, нужна некоторая подготовка. Нам понадобится следующая

Теорема 13.2.3 (о трех прямых). *Пусть числовая функция $h(z)$ голоморфна в полосе S_0, непрерывна и ограничена в полосе S. Пусть m_θ — верхняя грань ее модуля на вертикальной прямой с абсциссой θ. Тогда*

$$m_\theta\leqslant m_0^{1-\theta}m_1^\theta\quad(0\leqslant\theta\leqslant1). \tag{13.2.16}$$

Эта теорема аналогична известной теореме Адамара о трех кругах. Доказательство есть, например, в [6, п. 1.1], и [20, гл. XII, п. 1].

Заметим еще, что *для любых неотрицательных чисел m_0 и m_1 справедливо неравенство*

$$m_0^{1-\theta}m_1^\theta\leqslant\max(m_0,m_1), \tag{13.2.17}$$

легко проверяемое отдельно при $m_0>m_1$ и $m_0<m_1$.

Перейдем к доказательству второго неравенства в (13.2.14). Возьмем функцию $v(\xi)\in X_\theta$. Для сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такая функция $f(z)=f(z,\xi)\in F(X)$, что $f(\theta,\xi)=v(\xi)$ и $\|f\|_{F(X)}\leqslant\leqslant\|v\|_{X_\theta}+\varepsilon$. Рассмотрим функцию

$$g(z)=g(z,\xi)=(1+|\xi|^2)^{z/2}f(z). \tag{13.2.18}$$

Далее, положим

$$h(z)=\int g(z,\xi)\overline{\varphi(\xi)}\,d\xi, \tag{13.2.19}$$

где $\varphi(\xi)$ — любая финитная гладкая функция на $\mathbb{R}^n$ с единичной L_2-нормой. Здесь идея состоит в том, что при любом z

$$\|g(z,\xi)\|_{L_2}=\sup|h(z)|, \tag{13.2.20}$$

где верхняя грань берется по всем только что указанным φ.

К числовой функции $h(z)$ применим теорему о трех прямых с замечанием после нее. Получим

$$|h(\theta)|\leqslant\bigl(\sup|h(it)|\bigr)^{1-\theta}\bigl(\sup|h(1+it)|\bigr)^{\theta}\leqslant \\ \leqslant\max\bigl(\sup|h(it)|,\ \sup|h(1+it)|\bigr). \tag{13.2.21}$$

В силу неравенства Шварца имеем

$$|h(it)|\leqslant\|g(it)\|_{L_2},\quad |h(1+it)|\leqslant\|g(1+it)\|_{L_2}. \tag{13.2.22}$$

Из (13.2.20)—(13.2.22) выводим, что

$$\|g(\theta)\|_{L_2}\leqslant\max\bigl(\sup\|g(it)\|_{L_2},\ \sup\|g(1+it)\|_{L_2}\bigr),$$

т. е.

$$\|f(\theta)\|_{\widehat{H}^\theta}\leqslant\max\bigl(\sup\|f(it)\|_{L_2},\ \sup\|f(1+it)\|_{\widehat{H}^1}\bigr),$$

так что

$$\|v\|_{\widehat{H}^\theta}\leqslant\|v\|_{X_\theta}+\varepsilon.$$

Получаем второе неравенство в (13.2.14). □

Как можно перенести результат на другие U, мы будем объяснять дальше. Его обобщения на пространства H^s_p и B^s_p будут указаны в § 14.

Утверждение 2° сразу проверяется для всех указанных U.

Доказательство утверждения 2° для $1<p_j<\infty$.[1] Будем пользоваться обозначениями

$$X_0=L_{p_0}(U),\quad X_1=L_{p_1}(U),\quad X_\theta=[X_0,X_1]_\theta,\quad L_p=L_p(U). \tag{13.2.23}$$

[1] В первой части доказательства мы следуем книге [6], во второй отклоняемся от нее. В [6] доказательство проведено для $1\leqslant p_j\leqslant\infty$.

Нужно проверить, что нормы функции в пространствах L_p и X_θ оцениваются одна через другую. Сейчас через x придется обозначать точку из U.

Пусть функция $u(x)$ принадлежит L_p. Нормируем ее: пусть $\|u\|_{L_p}=1$. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \exp(\varepsilon z^2 - \varepsilon\theta^2)|u|^{p/p(z)}u/|u|, \tag{13.2.24}$$

где ε — малое положительное число и $1/p(z) = (1-z)/p_0 + z/p_1$. Множество точек x, в которых $u(x)=0$, сейчас исключается из U. Эта функция принадлежит пространству $F(X)$ и равна u при $z=\theta$. Несложные оценки показывают, что

$$\|f(it)\|_{L_{p_0}} \leqslant 1, \quad \|f(1+it)\|_{L_{p_1}} \leqslant e^\varepsilon, \tag{13.2.25}$$

так что $\|f\|_{F(X)} \leqslant e^\varepsilon$. Это приводит к неравенству $\|u\|_{X_\theta} \leqslant \|u\|_{L_p}$.

Докажем обратное неравенство. Предварительно заметим следующее. Из (13.2.13) вытекает, что

$$\frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{p_0'} + \frac{\theta}{p_1'}. \tag{13.2.26}$$

Действительно, это соотношение получается вычитанием из 1 обеих частей формулы (13.2.13). Пусть $v(x)$ — функция из $C_0^\infty(U)$ с единичной $L_{p'}$-нормой. Положим

$$g(z) = \exp(\varepsilon z^2 - \varepsilon\theta^2)|v|^{p'/p'(z)}v/|v|, \tag{13.2.27}$$

где снова ε — малое положительное число и $1/p'(z) = (1-z)/p_0' + z/p_1'$; точки x, в которых $v(x)=0$, исключаются из U. Эта функция принадлежит $F(X')$, где $X' = (L_{p_0'}, L_{p_1'})$, и равна v при $z=\theta$. Аналогично (13.2.25) мы имеем

$$\|g(it)\|_{L_{p_0'}} \leqslant 1, \quad \|g(1+it)\|_{L_{p_1'}} \leqslant e^\varepsilon. \tag{13.2.28}$$

Возьмем теперь функцию $u(x)$ из X_θ и для простоты нормируем ее: пусть $\|u\|_{X_\theta}=1$. Найдем такую функцию $f(z)$ из $F(X)$, что $f(\theta)=u$ и $\|f\|_{F(X)} \leqslant 1+\varepsilon$, т. е.

$$\|f(it)\|_{L_{p_0}} \leqslant 1+\varepsilon \quad \text{и} \quad \|f(1+it)\|_{L_{p_1}} \leqslant 1+\varepsilon. \tag{13.2.29}$$

Положим

$$h(z) = \int_U f(z,x)\overline{g(z,x)}\,dx. \tag{13.2.30}$$

При $z = \theta$

$$h(\theta) = \int_U u(x)\overline{v(x)}\,dx, \tag{13.2.31}$$

поэтому

$$\|u\|_{L_p} = \sup |h(\theta)|, \tag{13.2.32}$$

где верхняя грань берется по всем указанным выше v. По теореме о трех прямых с замечанием после нее

$$|h(\theta)| \leqslant \max(\sup |h(it)|,\ \sup |h(1+it)|). \tag{13.2.33}$$

Применяя неравенство Гёльдера к интегралу (13.2.30), из (13.2.29) и (13.2.28) получаем

$$|h(it)| \leqslant 1+\varepsilon, \quad |h(1+it)| \leqslant (1+\varepsilon)e^{\varepsilon}. \tag{13.2.34}$$

Отсюда, из (13.2.32) и (13.2.33)

$$\|u\|_{L_p} \leqslant (1+\varepsilon)e^{\varepsilon},$$

что и приводит к нужному неравенству $\|u\|_{L_p} \leqslant \|u\|_{X_\theta}$. □

Утверждение 2° можно доказать также для пространств U с мерой и функций со значениями в банаховых пространствах. Дополнительно можно отметить следующее утверждение. Если $X = (X_0, X_1)$ — банахова пара, то при $0 < \theta < 1$

$$\big[L_{p_0}(U, X_0), L_{p_1}(U, X_1)\big]_\theta = L_p(U, X_\theta), \tag{13.2.35}$$

где p такое же, как в (13.2.13).

13.2d. В качестве следствия из теорем 13.2.1 и 13.2.2 для пространств L_p получается *теорема Рисса—Торина* в формулировке Торина. Ее непосредственное доказательство приведено, например, в [6], п. 1.1, и [20, гл. 12, п. 1].

Теорема 13.2.4. *Если линейный оператор T действует ограниченным образом из пространства $L_{p_j}(U)$ в пространство $L_{q_j}(V)$ при $j = 0, 1$, где $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$ и p_j, $q_j \in [1, \infty]$, то он действует ограниченным образом из $L_p(U)$ в $L_q(V)$, где*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{13.2.36}$$

При этом справедлива оценка вида (13.2.6).

Торин пользовался функциями, голоморфными в полосе, и этим подсказал общую конструкцию в комплексном методе интерполяции.

Выведем из теоремы Рисса—Торина два классических неравенства для свертки двух функций

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_U f(x-y)g(y)\,dy \tag{13.2.37}$$

(ср. с [6]). Пусть функция $f \in L_1(U)$ фиксирована. Рассмотрим (13.2.37) как оператор, переводящий g в h. Если $g \in L_1(U)$, то неравенство

$$\|h\|_{L_1(U)} \leqslant \|f\|_{L_1(U)} \|g\|_{L_1(U)} \tag{13.2.38}$$

получается по теореме Фубини. Если $g \in L_\infty(U)$, то очевидным образом

$$\|h\|_{L_\infty(U)} \leqslant \|f\|_{L_1(U)} \|g\|_{L_\infty(U)}. \tag{13.2.39}$$

Мы заключаем, что *при* $f \in L_1(U)$ *свертка* (13.2.37) — *ограниченный оператор в любом пространстве* $L_p(U)$ *и*

$$\|h\|_{L_p(U)} \leqslant \|f\|_{L_1(U)} \|g\|_{L_p(U)} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty). \tag{13.2.40}$$

Теперь предположим, что функция f принадлежит некоторому $L_r(U)$, и попробуем рассмотреть (13.2.37) как оператор из $L_p(U)$ в $L_q(U)$. При $p=1$ согласно неравенству (13.2.40) с перестановкой f и g имеем

$$\|h\|_{L_r(U)} \leqslant \|g\|_{L_1(U)} \|f\|_{L_r(U)} \quad (1 \leqslant r \leqslant \infty). \tag{13.2.41}$$

При $p = r'$,

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1, \tag{13.2.42}$$

в силу неравенства Гёльдера

$$\|h\|_{L_\infty(U)} \leqslant \|f\|_{L_r(U)} \|g\|_{L_{r'}(U)}. \tag{13.2.43}$$

Делаем следующий вывод: наш оператор действует ограниченным образом из $L_p(U)$ в $L_q(U)$ при

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{r'}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{r} + \frac{\theta}{\infty}, \tag{13.2.44}$$

$0 < \theta < 1$, при этом справедливо неравенство

$$\|h\|_{L_q(U)} \leqslant \|f\|_{L_r(U)} \|g\|_{L_p(U)}, \tag{13.2.45}$$

называемое *неравенством Юнга*. Исключая θ из (13.2.44), получаем, что *оно справедливо при*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r'}, \quad 1 < p < r'. \tag{13.2.46}$$

Из теоремы Рисса—Торина несложно выводится также следующая классическая *теорема Хаусдорфа—Юнга*:

Теорема 13.2.5. *Преобразование Фурье F — непрерывный оператор из $L_p(\mathbb{R}^n)$ в $L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ при $1 \leqslant p \leqslant 2$, $p + p' = pp'$. Более точно, при этих p*

$$\|Fu\|_{L_{p'}} \leqslant (2\pi)^{n/p'} \|f\|_{L_p}. \tag{13.2.47}$$

Доказательство. Как известно, F — непрерывный оператор из $L_2(\mathbb{R}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ (даже изоморфизм с точностью до множителя, см. равенство Парсеваля (1.1.5)) и из $L_1(\mathbb{R}^n)$ в $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ (последнее легко проверяется). Отсюда и следует утверждение теоремы, причем получается и оценка (13.2.47). □

Имеется также аналогичная теорема, тоже Хаусдорфа—Юнга, о рядах Фурье, см. [20, гл. XII, п. 2]. В [20] доказывается также более общая теорема Ф. Рисса для случая равномерно ограниченного ортонормированного базиса вместо тригонометрической системы.

Теорема 13.2.6. *Пусть $1 < p \leqslant 2$, $p + p' = pp'$.*

1°. *Пусть $u(t)$ — функция из $L_p(0, 2\pi)$ с коэффициентами Фурье*

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) e^{-ikt} dt \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{13.2.48}$$

Тогда последовательность $c = \{c_k\}_{-\infty}^{\infty}$ принадлежит $l_{p'}$ и

$$\|c\|_{l_{p'}} \leqslant (2\pi)^{-1/p} \|u\|_{L_p}. \tag{13.2.49}$$

2°. *Пусть задана последовательность $c = \{c_k\}_{-\infty}^{\infty}$, принадлежащая l_p. Тогда существует функция $u \in L_{p'}(0, 2\pi)$ с коэффициентами Фурье* (13.2.48) *и*

$$(2\pi)^{-1/p'} \|u\|_{L_{p'}} \leqslant \|c\|_{l_p}. \tag{13.2.50}$$

Поясним, что функция $u(t)$ строится по коэффициентам Фурье как предел частных сумм

$$\sum_{|k| \leqslant N} c_k e^{ikt}.$$

13.2e. К нашему рассказу о комплексном методе мы добавим следующую теорему, которая позволяет лучше понять свойства пространства $F(X)$. Доказательство см. в [25, гл. IV, § 1].

Теорема 13.2.7. 1°. *Для функций из $F(X)$ при $z=s+it\in S_0$ имеет место представление*

$$f(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(i\tau)\mu_0(z,\tau)\,d\tau + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(1+i\tau)\mu_1(z,\tau)\,d\tau \qquad (13.2.51)$$

где

$$\mu_j(z,\tau) = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\pi s}{\operatorname{ch}\pi(\tau-t)-(-1)^j\cos\pi s} \quad (j=0,1). \qquad (13.2.52)$$

2°. *При $z\in S$*

$$\|f(z)\|_{\Sigma(X)} \leqslant \|f\|_{F(X)}. \qquad (13.2.53)$$

3°. *В пространстве $F(X)$ плотно множество функций вида*

$$g(z) = e^{\delta z^2}\sum_1^N x_k e^{\lambda_k z}, \qquad (13.2.54)$$

где $x_k\in\Delta(X)$, λ_k вещественны и $\delta>0$. Следовательно, в $F(X)$ плотно множество функций со значениями в $\Delta(X)$.

Последнее утверждение понадобится нам в п. 13.7.

13.3. Вещественный метод. В разных формах вещественный метод предложили Лионс, Петре (см., например, [261], [264], [281]) и другие математики; подробные ссылки см. в [6], [52] и [69]. Мы приведем одно из возможных определений — опишем так называемый *K-метод* [281].

Пусть снова (X_0, X_1) — интерполяционная пара. Следуя Петре, определим для $t\geqslant 0$ и $x\in\Sigma(X)$ числовую функцию $K(t,x)=K(t,x,X)$ формулой

$$K(t,x) = \inf\bigl\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x_0\in X_0,\ x_1\in X_1,\ x = x_0+x_1\bigr\}. \quad (13.3.1)$$

Она называется *K-функционалом*. При каждом $t>0$ это норма в $\Sigma(X)$, эквивалентная исходной. При фиксированном x это непрерывная возрастающая выпуклая вверх функция [52]. Функции

$$K(t,x,X) \quad \text{и} \quad t^{-1}K(t,x,X) \qquad (13.3.2)$$

ограничены сверху. Более того, как показано в [69, с. 296], первая из этих функций имеет конечный предел при $t\to\infty$, а вторая при

$t \to 0$. Отметим также, что

$$t^{-1}K(t, x, (X_0, X_1)) = K(t^{-1}, x, (X_1, X_0)). \tag{13.3.3}$$

Теперь определяем *вещественное интерполяционное пространство* $X_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q}$ при $0 < \theta < 1$ и $1 \leqslant q < \infty$ как состоящее из всех $x \in \Sigma(X)$, для которых

$$\|x\|_{X_{\theta,q}} = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta}K(t, x))^q \, \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty. \tag{13.3.4}$$

Выражение (13.3.4) — норма, и это пространство тоже банахово. При $q = \infty$ норма определяется формулой

$$\|x\|_{X_{\theta,\infty}} = \sup\nolimits_{t>0} t^{-\theta} K(t, x). \tag{13.3.5}$$

Все эти пространства содержат $\Delta(X)$ и содержатся в $\Sigma(X)$. Справедливы также следующие утверждения.

1. $(X_0, X_1)_{\theta,q} = (X_1, X_0)_{1-\theta,q}$.
2. $\Delta(X)$ плотно в $X_{\theta,q}$ при $q < \infty$.
3. Если $X_1 \subset X_0$, то $X_{\theta_1,q} \subset X_{\theta_0,q}$ при $\theta_0 < \theta_1$.
4. Если $q_1 < q_2$, то $X_{\theta,q_1} \subset X_{\theta,q_2}$.
5. Если X_0 и X_1 совпадают, то с ними совпадают все $X_{\theta,q}$.

Приведем основную теорему о K-методе — аналог теоремы 13.2.1. Пусть снова $X = (X_0, X_1)$ и $Y = (Y_0, Y_1)$ — две интерполяционные пары и T — линейный ограниченный оператор из $\Sigma(X)$ в $\Sigma(Y)$. Обозначим его сужения на X_j, как и раньше, через T_j и сужение на $X_{\theta,q}$ через $T_{\theta,q}$. Это обозначение будет использоваться и в дальнейшем.

Теорема 13.3.1. *Пусть T_j — ограниченные операторы из X_j в Y_j с нормами $\|T_j\| = M_j$ $(j = 0, 1)$. Тогда $T_{\theta,q}$ — ограниченный оператор из $X_{\theta,q}$ в $Y_{\theta,q}$ $(0 < \theta < 1,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty)$ с нормой $M_{\theta,q}$, удовлетворяющей неравенству*

$$M_{\theta,q} \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}. \tag{13.3.6}$$

Доказательство. Пусть $x \in X_{\theta,q}$. Мы имеем

$$K(t, Tx, Y) \leqslant \|T_0\| K\left(\frac{\|T_1\|}{\|T_0\|} t, x, X\right).$$

Поэтому

$$\|Tx\|_{Y_{\theta,q}} \leqslant \|T_0\| \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K\left(\frac{\|T_1\|}{\|T_0\|} t, x, X\right)\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

Сделаем здесь в интеграле замену $\tau = (\|T_1\|/\|T_0\|)t$. Получим

$$\|Tx\|_{Y_{\theta,q}} \leqslant \|T_0\| \left(\frac{\|T_1\|}{\|T_0\|} \right)^{\theta} \|x\|_{X_{\theta,q}}.$$

Таким образом, $T_{\theta,q}x$ принадлежит $Y_{\theta,q}$ и справедлива нужная оценка. □

Здесь мы тоже можем сказать, что интерполяционный функтор $X \mapsto X_{\theta,q}$ является точным порядка θ.

Существуют другие вещественные методы: J-метод (Петре), метод средних (Лионса—Петре), метод следов (Лионса; этот метод подсказан теоремами о следах для пространств типа Соболева). Однако доказывается их эквивалентность, обычно это делается в монографиях. См., например, [6] и [52]. Эти методы могут пригодиться в ситуации, когда надо исследовать интерполяцию новых пространств. Мы не будем останавливаться на этих и других методах и на общем понятии интерполяционного функтора. Очень советуем читателю познакомиться, по крайней мере, с методом следов по книге Лионса—Мадженеса [30] или книге Трибеля [52].

Приведем пример вещественной интерполяции (аналог второй части теоремы 13.2.2, но без доказательства).

Теорема 13.3.2. *При* $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$

$$(L_{p_0}(U), L_{p_1}(U))_{\theta,p} = L_p(U). \tag{13.3.7}$$

Здесь U, θ *и* p *такие же, как в теореме* 13.2.2.

Отметим, что соотношение (13.3.7) обобщается:

$$(L_{p_0}(U), L_{p_1}(U))_{\theta,q} = L_{p,q}(U), \tag{13.3.8}$$

где $q > p_0$. Здесь справа — *пространство Лоренца,* и это равенство можно считать одним из его определений. Другие определения см. в [6] или [52]. Добавим, что в литературе по теории интерполяции систематически изучались и другие классы пространств, близких к пространствам L_p.

Укажем теперь следующий результат о совпадении вещественного и комплексного методов.

Теорема 13.3.3. *Если* H_1 *и* H_2 — *гильбертовы пространства и одно из них непрерывно и плотно вложено в другое, то при* $0 < \theta < 1$

$$(H_1, H_2)_{\theta,2} = [H_1, H_2]_{\theta}. \tag{13.3.9}$$

Этот факт содержится в книге [52, п. 1.18.10, замечание 3].

Несколько свободнее предположения в статье [197]: там требуется только, чтобы эти пространства образовывали интерполяционную пару и пересечение этих пространств было плотно в них. Это совпадение фактически было известно Лионсу [263].

В частности, при $0<\theta<1$, $s_0\neq s_1$

$$(H^{s_0}(U), H^{s_1}(U))_{\theta,2} = H^s(U), \tag{13.3.10}$$

где s определено в (13.2.10).

Набор интерполяционных соотношений для вещественного метода и пространств H^s_p и B^s_p будет приведен в § 14.

13.4. Ретракции и коретракции. Теоремы, формулируемые в трех ближайших пунктах, хорошо известны; доказательства можно найти в [6] и [52]. Мы хотим, в частности, объяснить, как реально расширяется круг пространств, допускающих интерполяцию.

Приведем следующее определение. Пусть X и Y — два банаховых пространства и R — непрерывный оператор из X в Y. Он называется *ретракцией*, если имеет непрерывный правый обратный оператор T: $RT = I$, где I — единичный оператор в Y. Пространство Y при этом называется *ретрактом* для пространства X, а оператор T — *коретракцией*.

Очевидно, что $P=TR$ — *проектор* в X, т. е. $P^2=P$. Действительно, $(TR)^2=T(RT)R=TR$.

Подпространство X' в X называется *дополняемым*, если в X есть другое подпространство X'', такое, что X есть прямая сумма $X' \dotplus X''$. Из существования непрерывного проектора P на X' следует, что это подпространство дополняемо:

$$X = PX \dotplus (I-P)X. \tag{13.4.1}$$

Здесь I — единичный оператор в X.

Верно и обратное: если пространство X есть прямая сумма подпространств X' и X'', то имеются непрерывные проекторы пространства X на X' и X''. А именно, если $X \ni x = x' + x''$, где $x' \in X'$ и $x'' \in X''$, то можно положить $Px = x'$, $(I-P)x = x''$.

Пространство X'' можно выбирать по-разному, и проектор P зависит от его выбора. Иногда говорят, что P проектирует X на X' *параллельно* X''.

Конечномерные пространства всегда дополняемы. См. предложение 17.1.1. Подпространства гильбертова пространства тоже всегда дополняемы — имеют ортогональные дополнения.

Итак, $X_1 = TY$ — дополняемое подпространство в X. Ретракт Y для X оказывается изоморфным ему: R и T — взаимно обратные преобразования $X_1 \to Y$ и $Y \to X_1$.

Теперь меняем обозначения. Пусть имеются две интерполяционные пары $X = (X_0, X_1)$ и $Y = (Y_0, Y_1)$. Пусть заданы непрерывные отображения $R\colon \Sigma(X) \to \Sigma(Y)$ и $T: \Sigma(Y) \to \Sigma(X)$. Предположим, что Y_0 — ретракт для X_0 с ретракцией R_0 и коретракцией T_0, которые являются сужениями исходных отображений R и T на X_0 и Y_0 соответственно. Аналогично, пусть Y_1 — ретракт для X_1 с ретракцией R_1 и коретракцией T_1, которые являются сужениями исходных отображений R и T соответственно на X_1 и Y_1. Операторы R_i и T_i считаются непрерывными.

Теорема 13.4.1. *При этих предположениях Y_θ, $0 < \theta < 1$, — ретракт для X_θ. Соответствующие ретракция R_θ и коретракция T_θ являются сужениями отображений R и T соответственно на X_θ и Y_θ.*

Аналогично $Y_{\theta,q}$ — ретракт для $X_{\theta,q}$, $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Соответствующие ретракция $R_{\theta,q}$ и коретракция $T_{\theta,q}$ являются сужениями исходных отображений R и T соответственно на $X_{\theta,q}$ и $Y_{\theta,q}$.

Нам эта теорема нужна в ситуации, когда мы знаем $R_\theta X_\theta$ или $R_{\theta,q}X_{\theta,q}$. Поэтому удобнее

Следствие 13.4.2. *При предположениях теоремы* 13.4.1 *$R_\theta X_\theta$ совпадает с Y_θ и $R_{\theta,q}X_{\theta,q}$ совпадает с $Y_{\theta,q}$.*

Приведем пример применения этого утверждения. Операция сужения функций пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$ на ограниченную область Ω с гладкой или липшицевой границей Γ (или полупространство) есть ретракция этого пространства на $H^s(\Omega)$: как мы знаем, есть соответствующая коретракция — операция продолжения функций из $H^s(\Omega)$ до функций из $H^s(\mathbb{R}^n)$ (см. § 10). Поэтому если уже установлено, что формула (13.2.9) верна для пространств $H^s(\mathbb{R}^n)$, то аналогичный результат для пространств $H^s(\Omega)$ получается как следствие. Отметим, что без универсального оператора продолжения из § 10, действующего и при отрицательных s, в полной мере такой результат не получился бы. Аналогично обстоит дело с пространствами в $\mathbb{R}^n_+$. В частности, мы видим, что *пространства с дробными индексами можно определять при помощи интерполяции пространств с целыми индексами*.

Частично аналогичным способом можно получить эти формулы и для замкнутых многообразий — границ Γ ограниченных областей Ω, гладких или липшицевых. Имеется ретракция $H^{s+1/2}(\Omega) \to H^s(\Gamma)$ — переход к следу функции из $H^{s+1/2}(\Omega)$ в $H^s(\Gamma)$ при $s > 0$ в случае гладкой границы и при $0 < s < 1$ в случае липшицевой границы. Имеется соответствующая коретракция — восстановление функции (точнее, одной из функций) по заданному следу. Из справедливости формулы (13.2.9) в Ω выводим, что она справедлива на Γ — в указанных пределах для s.

Но эти ограничения снимаются: см. книгу Трибеля [98], где используются локальные карты, и его статью [324]. Затем результат распространяется на пространства функций на части многообразия (соответственно с гладкой или липшицевой границей).

Следующая теорема об интерполяции (дополняемых) подпространств выводится из следствия 13.4.2.

Теорема 13.4.3. *Пусть (X_0, X_1) — интерполяционная пара и Z — дополняемое подпространство в $\Sigma(X)$, причем сужения соответствующего проектора на X_0 и X_1 непрерывны. Тогда $(X_0 \cap Z, X_1 \cap Z)$ — тоже интерполяционная пара и*

$$[X_0 \cap Z, X_1 \cap Z]_\theta = [X_0, X_1]_\theta \cap Z, \tag{13.4.2}$$

$$(X_0 \cap Z, X_1 \cap Z)_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q} \cap Z. \tag{13.4.3}$$

Относительно интерполяции фактор-пространств см. п. 1.17.2 в [52].

13.5. Двойственность. Приведем сначала следующий общий факт (см. [6, п. 2.7]).

Теорема 13.5.1. *Пусть $X = (X_0, X_1)$ — интерполяционная пара и X_j^* — пространства, сопряженные к X_j $(j=0, 1)$. Тогда $X^*=(X_0^*, X_1^*)$ — тоже интерполяционная пара и справедливы соотношения*

$$[\Delta(X)]^* = \Sigma(X^*), \quad [\Sigma(X)]^* = \Delta(X^*). \tag{13.5.1}$$

Теперь сформулируем теорему о двойственности для вещественного и для комплексного методов (см. [6], пп. 3.7 и 4.5).

Теорема 13.5.2. *Пусть $X = (X_0, X_1)$ — интерполяционная пара. Тогда при $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant q < \infty$*

$$(X_0, X_1)_{\theta,q}^* = (X_0^*, X_1^*)_{\theta,q'}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1. \tag{13.5.2}$$

Если хотя бы одно из пространств X_0 и X_1 рефлексивно, то

$$[X_0, X_1]^*_\theta = [X_0^*, X_1^*]_\theta, \quad 0 < \theta < 1, \tag{13.5.3}$$

с равенством норм.

Приведем примеры к этой теореме.

1. Очевидным образом справедливы формулы

$$[H^{s_0}(\mathbb{R}^n), H^{s_1}(\mathbb{R}^n)]^*_\theta = [H^{-s_0}(\mathbb{R}^n), H^{-s_1}(\mathbb{R}^n)]_\theta, \tag{13.5.4}$$

$$[L_{p_0}(U), L_{p_1}(U)]^*_\theta = [L_{p_0'}(U), L_{p_1'}(U)]_\theta. \tag{13.5.5}$$

2. Используя сопряженность пространств $H^s(\Omega)$ и $\widetilde{H}^{-s}(\Omega)$, получаем из формулы (13.2.9) для $H^s(\Omega)$ в ограниченной липшицевой области Ω

Следствие 13.5.3. *Формула вида* (13.2.9) *верна для пространств* $\widetilde{H}^s(\Omega)$.

Замечание 13.5.4. В интересующих нас случаях все формы, определяющие двойственность, — продолжения одной и той же формы на прямые произведения соответствующих пространств. Это у нас продолжения скалярного произведения в L_2 на том или ином множестве — в $\mathbb{R}^n$, на компактном многообразии, в $\mathbb{R}^n_+$, в ограниченной области, на замкнутой поверхности или на ее части — на прямые произведения пространств.

Следует учесть, что в этих случаях для формы получается обобщенное неравенство Шварца

$$|(u, v)| \leqslant C\|u\|\|v\|^* \tag{13.5.6}$$

с постоянной C, не обязательно равной 1. Если $C = 1$, то будем говорить, что (13.5.6) — *точное неравенство Шварца*. В теоремах 13.5.1 и 13.5.2 имеется в виду точное неравенство Шварца. Чтобы перейти от обобщенного неравенства Шварца к точному, достаточно сделать перенормировку, например, заменить норму $\|v\|^*$ на $\|v\|' = \|v\|^*/C$.

В общем случае в комплексном методе тоже используется только одна двойственность между $X_0 \cap X_1$ и $X_0^* + X_1^*$ и ее продолжения по плотности в пространствах этого метода.

13.6. Повторная интерполяция. Часто полезны *теоремы о реитерации*. Их смысл состоит в следующем. Если мы получили два пространства интерполяцией из пространств X_0 и X_1 и проводим повторную интерполяцию, отправляясь от полученных пространств, то получатся пространства, которые мы могли бы получить при первичной интерполяции. Вот формулировка для комплексной интерполяции; здесь связь индексов не нуждается в комментариях.

Теорема 13.6.1. *Пусть* $\{X_\theta\}$ — *шкала пространств, полученная комплексной интерполяцией из пространств* X_0 *и* X_1, *и пусть*

$$\theta = (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1, \tag{13.6.1}$$

где η, θ_0 *и* θ_1 *лежат строго между нулем и единицей и* $\theta_0 \neq \theta_1$. *Тогда*

$$[X_{\theta_0}, X_{\theta_1}]_\eta = X_\theta \tag{13.6.2}$$

с равенством норм.

Аналогичный результат для вещественной интерполяции формулируется немного сложнее ([123, с. 28]):

Теорема 13.6.2. *Пусть* $X = (X_0, X_1)$ — *интерполяционная пара, и пусть*

$$0 < \theta_j < 1, \quad 0 < \eta < 1, \quad \theta = (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty. \tag{13.6.3}$$

Тогда при $\theta_0 \neq \theta_1$ *и любых* $q_j \in [1, \infty]$

$$(X_{\theta_0,q_0}, X_{\theta_1,q_1})_{\eta,q} = X_{\theta,q}. \tag{13.6.4}$$

Если же $\theta_0 = \theta_1 = \theta$, *то соотношение* (13.6.4) *верно при*

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\eta}{q_0} + \frac{\eta}{q_1}. \tag{13.6.5}$$

Далее, справедливы также следующие соотношения для последовательно выполняемых вещественной и комплексной или комплексной и вещественной интерполяций (см. [6, п. 4.7]).

Теорема 13.6.3. *Пусть* $X = (X_0, X_1)$ — *интерполяционная пара,*

$$\begin{gathered} 0 < \theta_0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \eta < 1, \quad 1 \leqslant q_j \leqslant \infty, \\ \theta = (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\eta}{q_0} + \frac{\eta}{q_1}. \end{gathered} \tag{13.6.6}$$

Тогда

$$[X_{\theta_0,q_0}, X_{\theta_1,q_1}]_\eta = X_{\theta,q}. \tag{13.6.7}$$

Далее, при $1 \leqslant q \leqslant \infty$

$$(X_{\theta_0}, X_{\theta_1})_{\eta,q} = X_{\theta,q}. \tag{13.6.8}$$

13.7. Интерполяция и экстраполяция обратимости. Результаты в этом пункте особенно полезны при изучении уравнений в частных производных.

13.7a. Теорема 13.7.1. *Пусть $X=(X_0, X_1)$ и $Y=(Y_0, Y_1)$ — две интерполяционные пары и T — непрерывный оператор из $\Sigma(X)$ в $\Sigma(Y)$. Предположим, что оператор T_θ непрерывен и обратим при $\theta=0$ и 1. Дополнительно предположим, что выполнены следующие условия согласованности: сужения операторов T_0 и T_1 на $\Delta(X)$ совпадают, а обратные к ним операторы совпадают на $\Delta(Y)$. Тогда все $T_\theta: X_\theta \to Y_\theta$ — обратимые операторы.*

Аналогичное утверждение верно для вещественной интерполяции.

Без дополнительного предположения эти результаты неверны, есть примеры. Наиболее простым является случай, когда $X_1 \subset X_0$ и $T_1 = T_0|_{X_1}$. Похожая теорема приведена и используется в статье [236] для случая $X=Y$.

Доказательство теоремы 13.7.1. По операторам $S_0 = T_0^{-1}$ на Y_0 и $S_1 = T_1^{-1}$ на Y_1 корректно определяется их продолжение S на $\Sigma(Y)$, и это ограниченный оператор из $\Sigma(Y)$ в $\Sigma(X)$ (см. замечание в п. 13.2b). Несложно проверяется, что это двусторонний обратный к T. Например, если

$$y = y_0 + y_1, \quad y_j \in Y_j,$$

то

$$TSy = T(S_0 y_0 + S_1 y_1) = T_0 S_0 y_0 + T_1 S_1 y_1 = y_0 + y_1 = y,$$

так что TS — единичный оператор; аналогично проверяется, что и ST — единичный оператор.

Остается воспользоваться теоремами 13.2.1 и 13.3.1. □

Кроме того, есть сильная теорема об *экстраполяции обратимости* для комплексной интерполяции, дающая результат, который иногда, в конкретных ситуациях, трудно получить без нее. Примеры ее применения будут указаны в § 16. Другое и чаще используемое название — теорема об *устойчивости обратимости.*

Теорема 13.7.2. *Пусть $X=(X_0, X_1)$ и $Y=(Y_0, Y_1)$ — две интерполяционные пары и T — непрерывный оператор из $\Sigma(X)$ в $\Sigma(Y)$. Предположим, что его сужение $T_\theta: X_\theta \to Y_\theta$ — обратимый оператор при некотором $\theta=\theta_0 \in (0, 1)$. Тогда T_θ — обратимый оператор для θ из некоторой окрестности точки θ_0.*

Такую теорему получил Шнейберг [171], его результаты имели большой резонанс в литературе. Эта теорема вызывает ассоциацию с классическим фактом из функционального анализа — оператор, близкий по норме к обратимому оператору, обратим, — но она глубже, речь идет о пространствах с разными нормами, и доказательство нетривиально. Аналогичная теорема для вещественной интерполяции получена в [333] (экстраполяция обратимости по θ, автор указал некоторую аналитическую структуру в вещественном методе интерполяции) и в [215] (экстраполяция обратимости по (θ, q)). См. также ссылки в [123], § 12.

Интересны и полезны оценки Шнейберга, приведем сначала наиболее просто формулируемый результат.

Если T_t — обратимый оператор, то норму обратного к нему оператора обозначим через $\beta(t)$. Пусть $M = \max \|T_j\|$ $(j = 0,\ 1)$.

Теорема 13.7.3. *Пусть $T_{1/2}$ обратим. Тогда T_t обратим при*

$$q_0(t) < \left[M\beta\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}, \quad \text{где } q_0(t) = \left|\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right]\right|, \tag{13.7.1}$$

и при этом

$$\beta(t) \leqslant \frac{M\beta\left(\frac{1}{2}\right) - q_0(t)}{M\left[1 - q_0(t) M\beta\left(\frac{1}{2}\right)\right]}. \tag{13.7.2}$$

Поясним, что

$$\beta\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant \frac{1}{\|T_{1/2}\|} \geqslant \frac{1}{M}$$

в силу (13.2.6), поэтому $M\beta\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant 1$, а $q_0(t) < 1$, так что числитель справа в (13.7.2) положителен.

В тех же работах доказываются теоремы об экстраполяции (устойчивости) фредгольмовости с сохранением индекса оператора. (См. определения в п. 17.1.) Там же показано, что если ядро или коядро исходного оператора тривиально, то и это его свойство устойчиво. См. также [250].

13.7b. В оставшейся части этого пункта мы приведем более полные результаты Шнейберга и наметим их доказательства, не очень простые. Мы сделаем это с некоторой дополнительной проработкой подробностей, но при следующем дополнительном предположении: хотя бы одно из пространств X_j рефлексивно. Это позволит воспользоваться соотношением (13.5.3).

Читатель может при желании пропустить этот материал.

Введем обозначение

$$\gamma(\theta)=\gamma(\theta,T)=\inf\frac{\|Tx\|_{Y_\theta}}{\|x\|_{X_\theta}} \tag{13.7.3}$$

и обозначим через K_T множество точек θ, в которых $\gamma(\theta)>0$. Пусть $s\in K_T$. Основной результат Шнейберга состоит в оценке $\gamma(t)$ снизу в других точках t, позволяющей оценить размеры окрестности точки s, принадлежащей K_T. Для $s,t\in(0,1)$ положим

$$q(s,t)=\left|\frac{\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right]-\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]}{1-\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right]\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]}\right|. \tag{13.7.4}$$

В частности, $q(1/2,t)=q_0(t)$. Заметим, что $q(s,t)<1$, так как

$$\operatorname{tg}\alpha(1+\operatorname{tg}\beta)<1+\operatorname{tg}\beta$$

при $-\pi/4<\beta\leqslant\alpha<\pi/4$.

Теорема 13.7.4. *Справедливо неравенство*

$$\gamma(t)\geqslant M\frac{\gamma(s)-q(s,t)M}{M-q(s,t)\gamma(s)}. \tag{13.7.5}$$

Доказательство. Нам понадобится следующее обобщение известной леммы Шварца для функции $\varphi(z)$, голоморфной и удовлетворяющей неравенству $|\varphi(z)|\leqslant M_1$ внутри единичного круга (см. [15]): для любых точек z и λ из этого круга

$$|\varphi(z)|\geqslant M_1\frac{|\varphi(\lambda)|-\left|\frac{\lambda-z}{1-\bar z\lambda}\right|M_1}{M_1-\left|\frac{\lambda-z}{1-\bar z\lambda}\right||\varphi(\lambda)|}. \tag{13.7.6}$$

Из этого неравенства при помощи конформного преобразования выводится неравенство для функций $\varphi(z)$, голоморфных и удовлетворяющих условию $|\varphi(z)|\leqslant M_1$ в вертикальной полосе S_0. Запишем его при вещественных $s,t\in(0,1)$:

$$|\varphi(t)|\geqslant M_1\frac{|\varphi(s)|-q(s,t)M_1}{M_1-q(s,t)|\varphi(s)|}=\frac{|\varphi(s)|-q(s,t)M_1}{1-q(s,t)\dfrac{|\varphi(s)|}{M_1}}. \tag{13.7.7}$$

Заметим, что последнее выражение уменьшается с увеличением M_1. (Если ухудшается заданная оценка сверху, то ухудшается получаемая оценка снизу.)

Отсюда мы выведем оценку для функции $f\in F(X)$:

Лемма 13.7.5. *Справедливо неравенство*

$$\|f(t)\|_{X_t} \geqslant \|f(z)\|_{F(X)} \frac{\|f(s)\|_{X_s} - q(s,t)\|f(z)\|_{F(X)}}{\|f(z)\|_{F(X)} - q(s,t)\|f(s)\|_{X_s}}. \tag{13.7.8}$$

Доказательство леммы. Достаточно получить это неравенство для функций f из $F(X)$ со значениями в $\Delta(X)$ (вместо $\Sigma(X)$), так как множество таких функций плотно в $F(X)$. (Это отмечено в утверждении 3° теоремы 13.2.7.) Итак, пусть значения $f(z)$ принадлежат $\Delta(X)$. Воспользуемся первой из формул (13.5.1). Она означает, что имеется билинейная (не полуторалинейная) форма $\langle f, g\rangle$ на $\Delta(X) \times \Sigma(X^*)$, выражающая общий вид линейного непрерывного функционала на $\Delta(X)$. Она непрерывна по нормам в этих пространствах и удовлетворяет точному неравенству Шварца

$$|\langle f, g\rangle| \leqslant \|f\|_{\Delta(X)}\|g\|_{\Sigma(X^*)}. \tag{13.7.9}$$

Если $g(z) \in F(X^*)$, то функция

$$\varphi(z) = \langle f(z), g(z)\rangle \tag{13.7.10}$$

голоморфна в S_0 и ограничена в S, так что можно пользоваться неравенством (13.7.7). Теперь подберем $g(z)$.

Так как $f(s)$ принадлежит X_s, а сопряженным к этому пространству является X_s^* (см. теорему 13.5.2), в последнем пространстве найдется функционал g, принимающий значение $\|f(s)\|_{X_s}$ на $f(s)$ с нормой $\|g\|_{X_s^*} = 1$. (См. [23, гл. IV, § 1, п. 3]) Он остается линейным непрерывным функционалом на $\Delta(X)$ и допускает запись $\langle f, g\rangle$ с тем же g. Теперь, задав малое $\varepsilon > 0$, найдем такую функцию $g(z) \in F(X^*)$, что $g(s) = g$ и $\|g(z)\|_{F(X^*)} < 1 + \varepsilon$. Этим определяется функция (13.7.10). На границах полосы S

$$|\varphi(z)| \leqslant \|f(z)\|_{F(X)}(1+\varepsilon); \tag{13.7.11}$$

согласно теореме о трех прямых и замечанию после нее это неравенство сохраняется во всей полосе S. В точках s и t имеем

$$|\varphi(s)| = \|f(s)\|_{X_s} \quad \text{и} \quad |\varphi(t)| \leqslant \|f(t)\|_{X_t}(1+\varepsilon). \tag{13.7.12}$$

Из (13.7.7), (13.7.11) и (13.7.12) получаем неравенство

$$\|f(t)\|_{X_t} \geqslant \|f(z)\|_{F(X)} \frac{\|f(s)\|_{X_s} - q(s,t)\|f(z)\|_{F(X)}(1+\varepsilon)}{\|f(z)\|_{F(X)}(1+\varepsilon) - q(s,t)\|f(s)\|_{X_s}} \tag{13.7.13}$$

после сокращения на $1+\varepsilon$. Переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$ и получаем (13.7.8). □

Вернемся к доказательству теоремы 13.7.4. Пусть $x \in X_t$ и $\|x\|_{X_t} = 1$. Тогда для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $f(z) \in F(X)$, что $\|f\|_{F(X)} \leqslant 1 + \varepsilon$ и $f(t) = x$. По лемме (с перестановкой s и t)

$$\|f(s)\|_{X_s} \geqslant (1+\varepsilon)\frac{1-q(s,t)(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon-q(s,t)} = r(\varepsilon). \tag{13.7.14}$$

Рассмотрим функцию $h(z) = Tf(z)$. Она принадлежит $F(Y)$. Мы имеем

$$\|h(z)\|_{F(Y)} \leqslant M(1+\varepsilon), \quad \|h(s)\|_{Y_s} \geqslant \gamma(s)r(\varepsilon). \tag{13.7.15}$$

Снова по лемме

$$\|h(t)\|_{Y_t} \geqslant M(1+\varepsilon)\frac{\gamma(s)r(\varepsilon)-q(s,t)M(1+\varepsilon)}{M(1+\varepsilon)-q(s,t)\gamma(s)r(\varepsilon)}. \tag{13.7.16}$$

При $\varepsilon \to 0$ величина $r(\varepsilon)$ стремится к 1, так что из (13.7.16) получаем

$$\|h(t)\|_{Y_t} \geqslant M\frac{\gamma(s)-q(s,t)M}{M-q(s,t)\gamma(s)}.$$

Это и приводит к неравенству (13.7.5). □

Следствие 13.7.6. *Если $s \in K_T$ и*

$$\gamma(s) > Mq(s,t), \tag{13.7.17}$$

то $t \in K_T$.

При $s = 1/2$ неравенство (13.7.17) принимает вид $\gamma(s) > Mq_0(t)$.

Теперь рассмотрим вместо K_T множество L_T точек s на интервале $(0, 1)$, в которых оператор T_s обратим. Для этих точек мы имеем

$$\gamma(s,T) = \|T_s^{-1}\|^{-1} = [\beta(s)]^{-1}. \tag{13.7.18}$$

Лемма 13.7.7. *Если L_T непусто, то $L_T = K_T$.*

Доказательство. Если $t \in K_T$, то справедлива априорная оценка

$$\|x\|_{X_t} \leqslant \gamma^{-1}(t)\|Tx\|_{Y_t}.$$

Для оператора $T_t\colon X_t \to Y_t$ она гарантирует отсутствие ядра и замкнутость области значений (см. в п. 17.1 замечание к предложению 17.1.7). Если есть точка $s \in L_T$, то все $\Delta(Y)$ принадлежит образу оператора $T_s\colon X_s \to Y_s$ и, значит, образу оператора $T\colon \Sigma(X) \to \Sigma(Y)$, а тогда и образу оператора $T_t\colon X_t \to Y_t$ при всех $t \in K_T$. Но множество $\Delta(Y)$ у нас плотно во всех Y_t. Поэтому $Y_t = TX_t$ при всех $t \in K_T$. □

Этой леммы нет в [171].

Из этой леммы, (13.7.5) и следствия 13.7.6 получаем

Следствие 13.7.8. *Если* $s \in L_T$ *и* $q(s,t) < [M\beta(s)]^{-1}$, *то* $t \in L_T$. *При этом*

$$\beta(t) \leqslant \frac{M\beta(s) - q(s,t)}{M(1 - q(s,t)M\beta(s))}. \tag{13.7.19}$$

Здесь, как в (13.7.2), положительность знаменателя влечет положительность числителя.

В частности, получаем утверждение теоремы 13.7.3.

13.8. Дальнейшие результаты.

13.8a. В контексте нашей книги полезно остановиться на пространствах, которые строятся при помощи дробных степеней операторов.

Пусть A — неограниченный самосопряженный положительный оператор в гильбертовом пространстве H. По его вещественным степеням A^γ можно построить шкалу гильбертовых пространств H_t, такую, что A^γ изоморфно отображает H_t на $H_{t-\gamma}$ при любом t. См. п. 17.3c.

Теорема 13.8.1. *Любые два пространства* H_{t_1}, H_{t_2} *образуют интерполяционную пару, и при* $0 < \theta < 1$

$$[H_{t_1}, H_{t_2}]_\theta = H_{(1-\theta)t_1 + \theta t_2}. \tag{13.8.1}$$

Доказательство можно найти, например, в книге [25].

Приведем примеры. В $L_2(\mathbb{R}^n)$ в качестве A можно взять оператор Λ (см. § 1), его степени порождают шкалу пространств $H^t(\mathbb{R}^n)$. На замкнутом гладком римановом многообразии M в качестве A можно взять аналогичный оператор $(-\Delta + 1)^{1/2}$ (где Δ — оператор Бельтрами—Лапласа), см. п. 6.4, это оператор с дискретным спектром, и его степени порождают шкалу пространств $H^t(M)$. В полупространстве, ограниченной области и на многообразии с краем можно рассматривать степени операторов, связанных с некоторыми эллиптическими задачами.

В частности, сказанное очень полезно в случае тора $\mathbb{T} = \mathbb{T}^n$. В этом случае оператор $A = (-\Delta + 1)^{1/2}$ имеет ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{T})$ из собственных функций $(2\pi)^{-n/2} e^{i\alpha \cdot x}$, соответствующие собственные значения — это $(|\alpha|^2 + 1)^{1/2}$. Поэтому степени A^s $(s \in \mathbb{R})$ определяются на гладких (для простоты) функциях

$$u(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha(u) e^{i\alpha \cdot x}$$

формулой
$$A^s u(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} (|\alpha|^2+1)^{s/2} c_\alpha(u) e^{i\alpha\cdot x}. \tag{13.8.2}$$

Так как A^s изоморфно отображает $H^s(\mathbb{T})$ на $L_2(\mathbb{T})$, то норма в $H^s(\mathbb{T})$ оказывается эквивалентной выражению (2.2.9):
$$\Big(\sum (1+|\alpha|^2)^s |c_\alpha(u)|^2\Big)^{1/2}. \tag{13.8.3}$$

Отметим еще, что как в теории уравнений в частных производных, так и в абстрактной теории операторов часто есть «свои», внутренние средства для установления, скажем, ограниченности, обратимости или фредгольмовости изучаемых операторов, действующих в шкалах банаховых пространств, без ссылок на теорию интерполяции. В частности, мы это уже видели в главах II и III и увидим в дальнейших параграфах (и в [3]). Но по сути там часто можно выявить механизмы теории интерполяции. Она предоставляет полезную точку зрения на эти средства.

13.8b. Приведем теперь некоторые утверждения об экстраполяции свойства компактности оператора (см. [222], а также ссылки в этой работе и в [123, § 7, п. 1]).

Теорема 13.8.2. *Пусть* $X=(X_0, X_1)$ *и* $Y=(Y_0, Y_1)$ — *две банаховы пары, и пусть* $T: \Sigma(X)\to\Sigma(Y)$ — *непрерывный оператор. Тогда*:

1. *Если оператор* $T_\theta: X_\theta \to Y_\theta$ *компактен при некотором* $\theta\in(0,1)$, *то это же верно при всех* $\theta\in(0,1)$.

2. *Если оператор* $T_1: X_1\to Y_1$ *компактен, то оператор* $T_{\theta,q}: X_{\theta,q}\to$ $\to Y_{\theta,q}$ *компактен при всех* $\theta\in(0,1)$ *и* $q\in[1,\infty]$.

Отметим, что в теоремах об эллиптических операторах в ограниченных областях или на замкнутых многообразиях компактность обычно непосредственно видна из того, что пространство, содержащее образ оператора, компактно вложено в область его определения. Но вот пример работы по уравнениям в частных производных, в которой результаты из [222] понадобились: [268].

13.8c. В ряде работ рассматривался вопрос о зависимости спектра оператора от индексов пространства, построенного по интерполяционной паре. Известны примеры, когда спектр зависит от этих индексов. Простейший пример: спектр *оператора Чезаро*
$$Tu(t) = \frac{1}{t}\int_0^t u(\tau)\,d\tau$$

в пространстве $L_p(0, \infty)$, $1 < p < \infty$, зависит от p. См. [202]. Упомянем теперь один положительный результат [289, с. 460].

Теорема 13.8.3. *Пусть (X_0, X_1) — интерполяционная пара и T — непрерывный оператор в $\Sigma(X)$. Предположим, что спектр $\sigma(T_{\theta_0})$ счетен при некотором $\theta_0 \in [0, 1]$. Тогда спектры $\sigma(T_\theta)$ совпадают с ним при $\theta \in (0, 1)$.*

На весь отрезок $[0, 1]$ этот результат не распространяется.

Отметим, однако, что в классических эллиптических задачах в ограниченных областях и на замкнутых многообразиях счетность спектра и его независимость от индексов пространства обычно легко следует из теоремы о повышении гладкости решений. Это мы видели в главе II и увидим в §§ 15—16.

13.8d. Приведем еще одну полезную теорему, для определенности для комплексного метода интерполяции. Пусть имеется набор банаховых пространств $\{X_t\}$, где индекс t изменяется на некотором интервале I. Скажем, что они образуют *интерполяционную шкалу* для комплексного метода, если любые два пространства X_{t_0} и X_{t_1} с $t_0 < t_1$ образуют интерполяционную пару и все пространства X_t с $t \in (t_0, t_1)$ получаются из нее комплексной интерполяцией:

$$X_t = [X_{t_0}, X_{t_1}]_\theta, \quad \text{где } t = t_0(1-\theta) + t_1\theta. \tag{13.8.4}$$

Теорема 13.8.4. *Пусть банаховы пространства X_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ непрерывно вложены в некоторое хаусдорфово пространство. Если*

$$[X_1, X_3]_\theta = X_2 \;\; и \;\; [X_2, X_4]_\vartheta = X_3, \;\; где \;\; \theta, \vartheta \in (0, 1), \tag{13.8.5}$$

то

$$[X_1, X_4]_\xi = X_2 \quad и \quad [X_1, X_4]_\eta = X_3, \tag{13.8.6}$$

где

$$\xi = \frac{\theta\vartheta}{1-\theta+\theta\vartheta}, \quad \eta = \frac{\vartheta}{1-\theta+\theta\vartheta}\,. \tag{13.8.7}$$

Это теорема Вольфа [332], см. также [247]. Имеется ее вариант для вещественного метода интерполяции. По существу эта теорема означает, что если две интерполяционные шкалы совпадают на пересечении соответствующих промежутков изменения индекса, то их можно объединить в одну шкалу. Кроме того, шкалы могут «ветвиться».

Нам эта теорема полезна для понимания вариационных эллиптических задач. А именно, мы знаем, что пространства $H^s(\Omega)$

и $\widetilde{H}^s(\Omega)$ совпадают, с точностью до эквивалентности норм, при $|s| < 1/2$. Это позволяет составлять интерполяционные шкалы из пространств $\widetilde{H}^s(\Omega)$ левее (или правее) какой-нибудь точки $s_0 \in \in (-1/2, 1/2)$ и пространств $H^s(\Omega)$ правее (соответственно левее) этой точки. Пространство решений и пространство правых частей оказываются лежащими в одной интерполяционной шкале. Мы упоминали об этом в п. 8.1. Но две нормы в этих пространствах при $0 \neq s \in (-1/2, 1/2)$ только эквивалентны (не совпадают). Аналогично обстоит дело с операторами на части границы (§§ 11—12). См. также § 16.

13.8e. Приведем теперь теорему, которая понадобится в § 16. Мы ее взяли из работы [296], где эта теорема приведена со ссылкой на [6, п. 3.5b].

Теорема 13.8.5. *Пусть X, Y и Z — три банаховых пространства, X непрерывно вложено в Y и T — линейный ограниченный оператор из X в Z. Предположим, что при некоторых постоянных $C > 0$ и $\sigma \in (0, 1)$ справедливо неравенство*

$$\|Tu\|_Z \leqslant C\|u\|_X^{1-\sigma}\|u\|_Y^{\sigma} \quad (u \in X). \tag{13.8.8}$$

Тогда T непрерывно продолжается до ограниченного оператора из $(X, Y)_{\sigma,1}$ в Z.

13.9. Позитивные операторы и их дробные степени. Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и A — замкнутый линейный оператор в X с плотной областью определения $D(A) \subset X$. Он называется *позитивным*, если замкнутая отрицательная полуось $\overline{\mathbb{R}}_-$ принадлежит резольвентному множеству этого оператора и на ней для резольвенты $R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ выполняется неравенство

$$\|R(\lambda)\| \leqslant \frac{C}{1 + |\lambda|}. \tag{13.9.1}$$

Отсюда следует, что резольвентное множество содержит некоторый сектор с биссектрисой $\mathbb{R}_-$ и некоторую окрестность начала (см., например, [24]); в угле чуть меньшего раствора с той же биссектрисой и чуть меньшей окрестности сохраняется неравенство вида (13.9.1).

Для простоты мы ограничимся рассмотрением позитивных операторов с дискретным спектром.

Через Λ сейчас обозначим фиксированный замкнутый сектор с биссектрисой $\mathbb{R}_+$, вне которого верна оценка (13.9.1). Он содержит спектр оператора.

Примерами позитивных операторов являются оператор A_1 в H_{-1} и оператор A_2 в H_0 из п. 11.10. В этих случаях есть (один и тот же) сектор Λ раствора меньше π. Примеры позитивных операторов в § 6 и § 7 — это, конечно, эллиптические с параметром вдоль $\mathbb{R}_-$ системы и задачи с однородными граничными условиями, однозначно разрешимые во всех точках замыкания этого луча.

Для позитивного оператора A можно определить его степени A^z с произвольным комплексным z. Степени $A^{-\alpha}$ с $\operatorname{Re}\alpha > 0$ определяются формулой

$$A^{-\alpha} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lambda^{-\alpha}R(\lambda)\,d\lambda. \tag{13.9.2}$$

Здесь бесконечный контур γ охватывает спектр оператора A. В основном он идет по лучам, охватывающим сектор Λ, но вблизи начала координат обходит его справа и не имеет общих точек с $\overline{\mathbb{R}}_-$. Направление обхода — снизу из бесконечности, т.е. положительное. Это ограниченный оператор. Неограниченный оператор A^α определяется как обратный к $A^{-\alpha}$. Определения степеней A^α при общих комплексных α можно смотреть, например, в книгах [52] и [24], а также в [66] и [78].

При перемножении двух степеней действует обычное правило сложения показателей. Если $0 \leqslant \alpha < \beta$, то область определения $D(A^\beta)$ плотно вложена в $D(A^\alpha)$. Кроме того, в гильбертовом пространстве $(A^\alpha)^* = (A^*)^\alpha$ [24].

В литературе большое внимание было уделено нахождению областей определения положительных дробных степеней.

Упомянем теорему Като из [252] (усиление результата Красносельского—Соболевского, 1959; см. [24]). В частности, в ней содержится следующий результат.

Теорема 13.9.1. *Если A и B — позитивные операторы в гильбертовых пространствах H и H' соответственно и T — ограниченный оператор из H в H', такой, что $TD(A) \subset D(B)$ и $\|BTu\|_{H'} \leqslant C\|Au\|_H$ на $D(A)$, то $TD(A^\theta) \subset D(B^\theta)$ и $\|B^\theta Tu\|_{H'} \leqslant C_\theta \|A^\theta u\|_H$ на $D(A^\theta)$, $0 < \theta < 1$.*

Однако особенно интересна следующая теорема, доказанная в книге Трибеля [52, п. 1.15].

Теорема 13.9.2. *Пусть A — позитивный оператор в гильбертовом пространстве $X = H$ и его чисто мнимые степени A^{it} — ограниченные операторы при достаточно малом t, имеющие равномерно по t ограниченные нормы. Тогда если $0 \leqslant \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\beta < \infty$ и $0 < \theta < 1$,* *то*

$$[D(A^\alpha), D(A^\beta)]_\theta = D(A^{\alpha(1-\theta)+\beta\theta}). \tag{13.9.3}$$

Арендт в [66, п. 4.4.10] указывает, что верно и обратное утверждение.

Простейший случай, когда чисто мнимые степени ограничены, — это случай самосопряженного позитивного оператора A в гильбертовом пространстве H. Отчасти повторяя сказанное в п. 17.3c, напомним, что в этом случае в H имеется ортонормированный базис из собственных векторов e_j нашего оператора ($j = 1, 2, \ldots$), и если λ_j — соответствующие собственные значения, то любой вектор в H разлагается в ряд

$$u = \sum_1^\infty (u, e_j)e_j, \quad \|u\|^2 = \sum_1^\infty |(u, e_j)|^2, \tag{13.9.4}$$

а оператор A^α действует по формуле

$$A^\alpha u = \sum_1^\infty \lambda_j^\alpha (u, e_j)e_j. \tag{13.9.5}$$

Этот оператор при $\operatorname{Re}\alpha > 0$ является неограниченным: ряд

$$\|A^\alpha u\|^2 = \sum_1^\infty |\lambda_j^\alpha|^2 |(u, e_j)|^2$$

сходится не при всех u. Но очевидно, что при чисто мнимом $\alpha = it$ это равномерно ограниченный оператор.

Таким образом, локальная ограниченность чисто мнимых степеней позитивного оператора — условие, необходимое и достаточное для справедливости формулы (13.9.3), как в случае самосопряженного оператора. Это условие выполнено не всегда, см., например, [256, с. 342].

Трибель пишет, что об ограниченности чисто мнимых степеней позитивных операторов мало что известно. Для операторов, отвечающих «гладким» эллиптическим с параметром задачам вне угла раствора меньше π, положительный результат содержится в работе Сили [308].

Глубокие исследования проблемы Като, которую мы затронем в п. 16.7, принесли положительные результаты для всех операторов A_1, отвечающих, в частности, нашим задачам в липшицевых областях. Мы сумеем объяснить это в п. 16.7, но со ссылками на некоторые импликации в работах по этой проблеме.

Для подготовки к этому сформулируем результат, содержащийся в короткой работе Яги [335].

Теорема 13.9.3. *Пусть для позитивного оператора A в гильбертовом пространстве H выполнено соотношение*

$$D(A^\alpha) = D(A^{*\alpha}) \tag{13.9.6}$$

при $0<\alpha<\varepsilon$ с достаточно малым ε. Тогда

$$D(A^\alpha) = [H, D(A)]_\alpha, \quad D(A^{*\alpha}) = [H, D(A^*)]_\alpha \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1). \tag{13.9.7}$$

При этом чисто мнимые степени оператора A локально ограничены.

Мы скажем еще несколько слов о полугруппах, связанных с позитивными операторами. Нам это дальше не понадобится, но за полугруппами стоят приложения к граничным задачам для эволюционных уравнений, в том числе в цилиндрических областях с липшицевым основанием.

Если A — позитивный оператор в банаховом пространстве X, то оператор $-A$ является генератором *сильно непрерывной полугруппы* $T(t)$ $(t \geqslant 0)$ ограниченных операторов:

$$T(t_1)T(t_2) = T(t_1 + t_2) \quad (t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0); \quad T(0) = I. \tag{13.9.8}$$

Непрерывна она в том смысле, что $T(t)u \to T(t_0)u$ при $t \to t_0$ для всех u и t_0. Генератором оператор $-A$ является в следующем смысле. Во-первых,

$$-Au = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)u - u}{t} \tag{13.9.9}$$

при всех $u \in D(A)$. Во-вторых, $u(t) = T(t)u$ — решение задачи Коши

$$u'(t) + Au(t) = 0, \quad u(0) = u. \tag{13.9.10}$$

Мы не останавливаемся здесь на уточнениях. Для нормы $\|T(t)\|$ получается оценка $\|T(t)\| \leqslant Me^{ht}$ при некоторых $M \geqslant 1$ и $h \in \mathbb{R}$.

Если пространство гильбертово и раствор угла Λ меньше π, то оценка принимает вид

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{-\varepsilon t} \tag{13.9.11}$$

с некоторым $\varepsilon > 0$. Полугруппа в этом случае называется *экспоненциально устойчивой*. Кроме того, она в этом случае является *аналитической*: допускает аналитическое продолжение в сектор на комплексной полуплоскости, содержащий $\overline{\mathbb{R}}_+$, а степени $A^{-\alpha}$ с $\operatorname{Re}\alpha > 0$

выражаются через полугруппу по формуле

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t)\, dt. \tag{13.9.12}$$

См., например, [24], [52], [58], [66], [78].

§ 14. Пространства W_p^s, H_p^s и B_p^s

В пп. 14.1—14.5 мы кратко опишем основные факты теории пространств W_p^s для $s \geqslant 0$ и пространств H_p^s и B_p^s для $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$.

Как мы уже отмечали, при $p = 2$ последние два пространства совпадают с H^s. Как и при $p = 2$, индекс s в общем случае связан с гладкостью элементов из H_p^s или B_p^s. Индекс p указывает на связь этих пространств с пространством L_p.

В п. 14.6 мы добавочно приведем определения этих пространств для $p = 1$ и $p = \infty$. В п. 14.7 определим еще более общие пространства $F_{p,q}^s$ Трибеля—Лизоркина и общие пространства $B_{p,q}^s$ Бесова. Подробный разбор свойств пространств, определяемых в этих двух пунктах, — за рамками нашей книги. Но кое-что мы упомянем, в частности, для использования в § 16.

14.1. Пространства функций в $\mathbb{R}^n$. Как и в § 1, здесь нам понадобится оператор

$$\Lambda^t = F^{-1}(1 + |\xi|^2)^{t/2} F, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{14.1.1}$$

где F — преобразование Фурье в смысле обобщенных функций.

Числа p и p', бóльшие 1, будем считать связанными соотношением

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{14.1.2}$$

Пространство С. Л. Соболева $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ с целым неотрицательным $s = m$ и $1 < p < \infty$ определяется как состоящее из принадлежащих пространству $L_p(\mathbb{R}^n)$ функций $u(x)$, у которых производные до порядка m включительно в смысле обобщенных функций тоже принадлежат $L_p(\mathbb{R}^n)$ и конечна норма

$$\|u\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int |D^\alpha u(x)|^p\, dx \right)^{1/p}, \tag{14.1.3}$$

где можно оставить $\alpha = (0, \ldots, 0)$ и $(m, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, m)$.

Пространство Л. Н. Слободецкого $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ с нецелым положительным $s = m + \theta$, $m = 0, 1, \ldots$, $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$, определяется как состоящее из принадлежащих $L_p(\mathbb{R}^n)$ функций $u(x)$, у которых производные до порядка $m = [s]$ включительно в смысле обобщенных функций тоже принадлежат $L_p(\mathbb{R}^n)$ и при этом конечна норма

$$\|u\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=m} \left(\iint \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+p\theta}}\, dx\, dy \right)^{1/p}. \quad (14.1.4)$$

Основная работа Л. Н. Слободецкого [160] относится к случаю $p = 2$, но он пользовался этими пространствами и при $p \neq 2$ [161].

Пространство $H_p^s(\mathbb{R}^n)$, называемое чаще всего *пространством бесселевых потенциалов*, определяется при всех вещественных s и $1 < p < \infty$ как пространство всех обобщенных функций из $\mathcal{S}'$ с конечной нормой

$$\|u\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} = \|\Lambda^s u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \quad (14.1.5)$$

В литературе эти пространства называют также *пространствами Лебега*, *пространствами Лиувилля* и *обобщенными пространствами Соболева*. Это пространство при целых неотрицательных s совпадает с пространством Соболева $W_p^s(\mathbb{R}^n)$. При $p = 2$ и любом s оно совпадает с $H^s(\mathbb{R}^n)$. Как и раньше, все совпадения понимаются с точностью до эквивалентности норм.

Пространство О. В. Бесова $B_p^s(\mathbb{R}^n)$ определяется при всех s и $1 < p < \infty$ следующим образом. Фиксируем какое-нибудь $\sigma \in (0, 1)$. Это пространство состоит из всех обобщенных функций из $\mathcal{S}'$ с конечной нормой

$$\|u\|_{B_p^s(\mathbb{R}^n)} = \|\Lambda^{s-\sigma} u\|_{W_p^\sigma(\mathbb{R}^n)}. \quad (14.1.6)$$

От выбора σ это пространство не зависит. При нецелом $s > 0$ это пространство совпадает с пространством Слободецкого $W_p^s(\mathbb{R}^n)$, а при $p = 2$ и любом s — снова с $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Отметим, что при целом $s = m + 1 > 0$ норма в $B_p^s(\mathbb{R}^n)$ определяется формулой вида (14.1.4) с $\theta = 1$:

$$\|u\|_{B_p^{m+1}(\mathbb{R}^n)} = \\ = \|u\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=m} \left(\iint \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+p}}\, dx\, dy \right)^{1/p}. \quad (14.1.7)$$

См. [80, с. 7].

Пространства $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ и $B_p^s(\mathbb{R}^n)$ совпадают только при $p = 2$.

Теорема 14.1.1. *Все эти пространства банаховы, в частности они полны. Линеал $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотен в каждом из них. Оператор Λ^t изоморфно отображает $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ на $H_p^{s-t}(\mathbb{R}^n)$ и $B_p^s(\mathbb{R}^n)$ на $B_p^{s-t}(\mathbb{R}^n)$ при любых s, t и $1 < p < \infty$.*

В исходном определении пространств $H^s(\mathbb{R}^n)$ мы описали их через изоморфизмы с весовыми L_2-пространствами $\widehat{H}^s(\mathbb{R}^n)$. При $p \neq 2$ похожих фактов нет. В частности, вместо теоремы о том, что преобразование Фурье изоморфно отображает пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$ на себя, мы имеем только теорему Хаусдорфа—Юнга (теорема 13.2.5). Но оператор (14.1.1) сохраняет свое значение.

Приведем некоторые соотношения включения. Пространства $W_p^s(\mathbb{R}^n)$, $B_p^s(\mathbb{R}^n)$, $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ расширяются с уменьшением верхнего индекса, операторы вложения непрерывны. Кроме того, для этих пространств справедливы включения (см., например, [52, п. 2.3.3])

$$\begin{aligned} H_p^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \subset B_p^s(\mathbb{R}^n) \subset H_p^s(\mathbb{R}^n) \quad &\text{при } 1 < p \leqslant 2, \\ B_p^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \subset H_p^s(\mathbb{R}^n) \subset B_p^s(\mathbb{R}^n) \quad &\text{при } 2 \leqslant p. \end{aligned} \tag{14.1.8}$$

Здесь положительное ε сколь угодно мало́ и все операторы вложения непрерывны. Кроме того, это плотные вложения.

Следующие две теоремы — это содержательные *теоремы вложения*. См., в частности, [52, п. 2.8.1], где они доказываются при помощи дискретных представлений функций. См. также [6, п. 6.5].

Теорема 14.1.2. *Пусть*

$$1 < p \leqslant q < \infty, \quad s - \frac{n}{p} \geqslant t - \frac{n}{q}. \tag{14.1.9}$$

Тогда имеют место непрерывные и плотные вложения

$$\begin{gathered} W_p^s(\mathbb{R}^n) \subset W_q^t(\mathbb{R}^n) \quad (s, t \geqslant 0), \\ H_p^s(\mathbb{R}^n) \subset H_q^t(\mathbb{R}^n), \quad B_p^s(\mathbb{R}^n) \subset B_q^t(\mathbb{R}^n). \end{gathered} \tag{14.1.10}$$

В частности, $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вложено в $L_q(\mathbb{R}^n)$ при $0 < n/p - s \leqslant$ $\leqslant n/q$.

Теорема 14.1.3. *При*

$$s > \frac{n}{p} + t, \tag{14.1.11}$$

где $t > 0$, пространство $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вложено в пространство $C_b^t(\mathbb{R}^n)$. Это вложение имеет место также при $s = n/p + t$, если t нецелое.

В частности, $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ непрерывно вложено в $C_b(\mathbb{R}^n)$ при $s > n/p$.

При $p=2$ и $s>n/2+t$ это вложение было доказано в § 1. Указанное сейчас усиление получается средствами теории интерполяции с использованием пространств Бесова с тремя индексами.

Некоторые дополнительные замечания к теоремам вложения мы приведем в п. 14.4.

Следующая теорема — о двойственности.

Теорема 14.1.4. *Пространства $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ и $H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)$ при $1<p<\infty$ являются взаимно сопряженными относительно продолжения скалярного произведения $(u, v)_{0,\mathbb{R}^n}$ на их прямое произведение. При этом справедливо обобщенное неравенство Гёльдера—Шварца*

$$|(u, v)_{0,\mathbb{R}^n}| \leqslant C\|u\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)}. \tag{14.1.12}$$

Такое же утверждение верно для пространств $B_p^s(\mathbb{R}^n)$ и $B_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Здесь в первом случае доказательство сводится при помощи операторов $\Lambda^{\pm s}$ к случаю $s=0$, в котором используется сопряженность пространств L_p и $L_{p'}$ и обычное неравенство Гёльдера.

В частности, сопряженным к $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ в силу приведенных формулировок при целом $s\geqslant 0$ оказывается пространство $H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)$, а при нецелом $s>0$ — пространство $B_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Из теоремы 14.1.4 следует рефлексивность пространств $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ и $B_p^s(\mathbb{R}^n)$.

Приведем некоторые интерполяционные соотношения. См., например, ([6, п. 6.4]).

Теорема 14.1.5. *Пусть $\theta\in(0, 1)$, $p>1$, $q>1$, $s\neq t$,*

$$\frac{1}{r}=\frac{1-\theta}{p}+\frac{\theta}{q}. \tag{14.1.13}$$

Тогда для пространств в $\mathbb{R}^n$ справедливы соотношения

$$\begin{gathered}[H_p^s, H_q^t]_\theta = H_r^{(1-\theta)s+\theta t}, \quad (H_p^s, H_q^s)_{\theta,r} = H_r^s, \\ (H_p^s, H_p^t)_{\theta,q} = B_q^{(1-\theta)s+\theta t}\end{gathered} \tag{14.1.14}$$

и

$$[B_p^s, B_q^t]_\theta = B_r^{(1-\theta)s+\theta t}, \quad (B_p^s, B_q^t)_{\theta,r} = B_r^{(1-\theta)s+\theta t}. \tag{14.1.15}$$

Не вдаваясь в детали, отметим, что эти результаты выводятся из других определений этих пространств — с дискретными нормами (см. ниже п. 14.6) при помощи теорем об интерполяции пространств

L_p (и l_p) со значениями в некоторых банаховых пространствах. Подробности см. в [6] или [52].

Здесь обращают на себя внимание следующие обстоятельства. Пространства бесселевых потенциалов и пространства Бесова — это в общем случае разные интерполяционные шкалы. Пространства Соболева принадлежат первой из этих шкал, а пространства Слободецкого — второй. При вещественной интерполяции пространств бесселевых потенциалов могут появиться пространства Бесова.

В отношении мультипликаторов мы ограничимся простейшими утверждениями, аналогичными доказанным в п. 1.9; они тоже легко проверяются. Более глубокую информацию можно найти в [319, с. 231], [34] и [95]. В частности, на эти пространства обобщаются оценки из п. 1.9.

Теорема 14.1.6. *В $L_p(\mathbb{R}^n)$ ограничен оператор умножения на ограниченную измеримую функцию. В пространствах Соболева $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ с целым положительным m оператор умножения на функцию $a(x)$ ограничен, если она принадлежит $C_b^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$. В пространствах Слободецкого $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ с нецелым $s=m+\theta>0$, $0<\theta<1$, оператор умножения на $a(x)$ ограничен, если эта функция принадлежит $C_b^{m,\vartheta}(\mathbb{R}^n)$, где $\vartheta\in(\theta,1)$. Аналогичные утверждения справедливы для сопряженных пространств $H_{p'}^{-m}(\mathbb{R}^n)$ и $B_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^n)$.*

Мы должны также упомянуть о мультипликаторах Фурье. Функция $\psi(\xi)$ называется *мультипликатором Фурье* для данного пространства функций от x в $\mathbb{R}^n$, если в этом пространстве ограничен оператор

$$u(x) \to ((F^{-1}\psi) * u)(x), \tag{14.1.16}$$

где F — преобразование Фурье в смысле обобщенных функций. Пространство мультипликаторов Фурье для $L_p(\mathbb{R}^n)$ обозначим через M_p. Например, $M_2=L_\infty$. Классический результат о пространствах M_p принадлежит С. Г. Михлину [37], он вызвал много обобщений, см., например, [55], [146], [6], [52, 53]. Приведем формулировку теоремы, которая содержится в [6, п. 6.1].

Теорема 14.1.7. *Пусть $\rho(\xi)$ — функция, непрерывно дифференцируемая до порядка L, где $L>n/2$, и*

$$|\xi^\alpha||\partial^\alpha\rho(\xi)| \leqslant A \quad (|\alpha| \leqslant L). \tag{14.1.17}$$

Тогда $\rho(\xi)\in M_p$ при всех $p\in(1,\infty)$, при этом норма оператора (14.1.16) *не превосходит C_pA.*

Теорема об операторе перехода к следу, определенном на гладких функциях, как и раньше, формулой

$$\mathrm{Tr}\colon f(x) \to f(x', 0), \tag{14.1.18}$$

справедлива в следующей формулировке. См., например, [6, п. 6.6], [52, п. 2.9] и приведенные там ссылки.

Теорема 14.1.8. *Оператор* Tr *при* $s > 1/p$ *продолжается до ограниченного оператора*

1) *из* $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ *в* $B_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$;

2) *из* $B_p^s(\mathbb{R}^n)$ *в* $B_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$;

3) *в частности, из* $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ *в* $B_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Эти операторы имеют ограниченные правые обратные.

Напомним, что пространство $B_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$ совпадает с пространством $W_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$ при нецелом $s - 1/p > 0$. Интересно отметить, что правый обратный — один и тот же оператор, т. е. он действует из $B_p^{s-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$ в пересечение пространств $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ и $B_p^s(\mathbb{R}^n)$. Это выясняется в книге [80].

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что следы функций из пространств H принадлежат пространствам B.

Справедлива также теорема об операторе перехода к данным Коши на гиперплоскости и о правом обратном к нему операторе; читателю будет нетрудно сформулировать ее самостоятельно.

14.2. Пространства на гладких многообразиях. Если M — замкнутое бесконечно гладкое компактное многообразие, то нормы во всех пространствах

$$W_p^s(M),\ s \geqslant 0, \quad H_p^s(M) \text{ и } B_p^s(M),\ s \in \mathbb{R},\ 1 < p < \infty,$$

естественным образом определяются при помощи достаточно мелкого разбиения единицы на M и соответствующих норм в $\mathbb{R}^n$ — по образцу того, как это сделано в § 2. Нетрудно сформулировать свойства этих пространств, вытекающие из аналогичных свойств пространств в $\mathbb{R}^n$, и мы на этом останавливаться не будем. Если M имеет конечную гладкость, то промежуток допустимых s сужается. Эти пространства расширяются с уменьшением верхнего индекса и с уменьшением нижнего индекса; операторы вложения непрерывны. Вложение $H_p^\sigma(M)$ в $H_p^s(M)$ и $B_p^\sigma(M)$ в $B_p^s(M)$ при $\sigma > s$ компактно.

14.3. Пространства в $\mathbb{R}^n_+$ и в области с гладкой границей. В этом пункте через Ω обозначается полупространство $\mathbb{R}^n_+$ или ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей.

Для $-\infty < s < \infty$ и $1 < p < \infty$ *пространства* $H^s_p(\Omega)$ *и* $B^s_p(\Omega)$ определяются как состоящие из сужений u на Ω функций (или обобщенных функций) w из соответствующих пространств в $\mathbb{R}^n$. При этом норма функции u обычным образом определяется как нижняя грань норм ее продолжений w. В частности, это относится к пространствам Соболева—Слободецкого $W^s_p(\Omega)$ с $s \geqslant 0$.

Нормы в последних эквивалентны нормам вида (14.1.3)—(14.1.4) с интегрированием по Ω.

Оператор Хестенса $\mathcal{E}_N$ (см. пп. 3.1 и 5.1) годится для продолжения функции $u \in W^s_p(\Omega)$, $s \geqslant 0$, до функции $w \in W^s_p(\mathbb{R}^n)$ при достаточно большом N, если Ω — полупространство или область с гладкой границей. При всех s универсальный оператор Рычкова [294] $\mathcal{E}$ годится для продолжения функций из $H^s_p(\Omega)$ до функций из $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ и для продолжения функций из $B^s_p(\Omega)$ до функций из $B^s_p(\mathbb{R}^n)$. Здесь подразумевается, что этот оператор ограничен в соответствующих нормах. В § 10 мы рассмотрели его при $p = 2$.

С использованием определений и универсального оператора продолжения получаем:

Теорема 14.3.1. *Пространства* $H^s_p(\Omega)$ *и* $B^s_p(\Omega)$ *банаховы. Линеал* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *плотен в них. Все приведенные в п.* 14.1 *включения и теоремы вложения остаются справедливыми для* Ω *вместо* $\mathbb{R}^n$. *В случае ограниченной области при* $\sigma > s$ *вложения* $H^\sigma_p(\Omega)$ *в* $H^s_p(\Omega)$ *и* $B^\sigma_p(\Omega)$ *в* $B^s_p(\Omega)$ *компактны. Интерполяционные соотношения* (14.1.14) *и* (14.1.15) *распространяются на случай* Ω *вместо* $\mathbb{R}^n$.

Последнее утверждение следует из того, что сужение функций на Ω оказывается ретракцией, см. теорему 13.4.1. На пространства в Ω переносятся также наши утверждения о мультипликаторах.

Определим теперь пространства $\widetilde{H}^s_p(\Omega)$ и $\widetilde{B}^s_p(\Omega)$ при всех s и $1 < p < \infty$. Первое состоит из функций (или обобщенных функций), принадлежащих $H^s_p(\mathbb{R}^n)$, с носителями в $\overline{\Omega}$. Норма берется из $H^s_p(\mathbb{R}^n)$. Второе состоит из функций (или обобщенных функций), принадлежащих $B^s_p(\mathbb{R}^n)$, с носителями в $\overline{\Omega}$. Норма берется из $B^s_p(\mathbb{R}^n)$. В этих новых пространствах плотны функции из $C^\infty_0(\Omega)$, продолженные нулем вне Ω. На эти пространства тоже распространяются интерполяционные соотношения.

Рассмотрим скалярное произведение $(u, v)_{0,\Omega}$. Оно продолжается с гладких функций u в $\overline{\Omega}$ и гладких финитных в Ω функций v до полуторалинейной формы, непрерывной на $H_p^s(\Omega) \times \widetilde{H}_{p'}^{-s}(\Omega)$, и до формы, непрерывной на $B_p^s(\Omega) \times \widetilde{B}_{p'}^{-s}(\Omega)$. (Тильду здесь можно перенести с пространств для v на пространства для u.) См. (14.3.1).

Теорема 14.3.2. *Пространства $H_p^s(\Omega)$ и $\widetilde{H}_{p'}^{-s}(\Omega)$ сопряжены относительно продолжения формы*

$$(u, v)_\Omega =: (\mathcal{E}u, v)_{\mathbb{R}^n} \tag{14.3.1}$$

на их прямое произведение. То же верно для пространств $B_p^s(\Omega)$ и $\widetilde{B}_{p'}^{-s}(\Omega)$. В частности, все эти пространства рефлексивны.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.2.1.

Оператор $\mathcal{E}_0$ продолжения нулем (см., в частности, п. 3.4) действует ограниченным образом из $H_p^s(\Omega)$ в $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ и из $B_p^s(\Omega)$ в $B_p^s(\mathbb{R}^n)$ при $0 \leqslant s < 1/p$. С учетом теоремы 14.3.2 получается

Теорема 14.3.3. *Пространства $H_p^s(\Omega)$ и $\widetilde{H}_p^s(\Omega)$ можно отождествить при $-1/p' < s < 1/p$, нормы эквивалентны. То же верно для пространств $B_p^s(\Omega)$ и $\widetilde{B}_p^s(\Omega)$.*

Через $\mathring{H}_p^s(\Omega)$ обозначим пополнение линеала $C_0^\infty(\Omega)$ в $H_p^s(\Omega)$ и через $\mathring{B}_p^s(\Omega)$ — пополнение того же линеала в $B_p^s(\Omega)$.

Пространства $\widetilde{H}_p^s(\Omega)$ и $\mathring{H}_p^s(\Omega)$ отождествляются при $s > 0$, $s \neq k + 1/p$ с целыми неотрицательными k. То же верно для пространств B вместо H.

Приведем теорему о следе. Через Γ обозначим границу области Ω.

Теорема 14.3.4. *Если Ω — полупространство или область с гладкой границей, то оператор перехода к следу на Γ действует ограниченным образом из $H_p^{s+1/p}(\Omega)$ в $B_p^s(\Gamma)$, а также из $B_p^{s+1/p}(\Omega)$ в $B_p^s(\Gamma)$ при $s > 0$. Имеется общий ограниченный правый обратный оператор, действующий из $B_p^s(\Gamma)$ в оба пространства $H_p^{s+1/p}(\Omega)$ и $B_p^{s+1/p}(\Omega)$, т. е. действующий в их пересечение.*

Пространства $\widetilde{H}_{p'}^{-s}(\Omega)$ и $\widetilde{B}_{p'}^{-s}(\Omega)$ при $s > 1/p$ содержат непрерывные функционалы соответственно над $H_p^s(\Omega)$ и $B_p^s(\Omega)$, сосредоточенные на границе. Они реализуются как функционалы на граничных значениях функций из последних пространств и производных этих функций.

Пусть s — неотрицательное число и $s - 1/p$ не является целым неотрицательным числом. Тогда две функции $u_1 \in H_p^s(\mathbb{R}_+^n)$

и $u_2 \in H^s_p(\mathbb{R}^n_-)$ «склеиваются» в одну функцию из $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ в том и только в том случае, если либо $0 \leqslant s < 1/p$, либо они имеют одинаковые данные Коши на граничной гиперплоскости порядка $[s - 1/p]$. Такое же утверждение верно для функций из пространств B^s_p.

14.4. Замечания к теоремам вложения. Первоначальные доказательства теорем вложения у самого С. Л. Соболева [48] очень поучительны. По существу он пользовался интегральным представлением функций при помощи операторов типа потенциала. Его методика в дальнейшем развивалась и совершенствовалась в литературе, в том числе в учебной. В особенности можно рекомендовать пособие [165]. Приведем пример, взятый из этого пособия.

Пусть Ω — ограниченная область и $u(x)$ — функция из $C^\infty_0(\Omega)$. Используя фундаментальное решение $\mathcal{E}(x)$ уравнения Лапласа, можно записать $u(x)$ в виде объемного потенциала

$$u(x) = \int\limits_\Omega \mathcal{E}(x-y)\Delta u(x)\,dx. \tag{14.4.1}$$

Интегрированием по частям эта формула приводится к виду

$$u(x) = c_n \sum_{k=1}^n \int\limits_\Omega \frac{x_k - y_k}{|x-y|^n}\partial_k u(y)\,dy. \tag{14.4.2}$$

Здесь на первые производные действуют интегральные операторы со слабой особенностью. Это представление распространяется на функции из $\mathring{W}^1_p(\Omega)$. Оно позволяет показать, что $\mathring{W}^1_p(\Omega)$ непрерывно вкладывается в $L_q(\Omega)$ при $1 \leqslant p \leqslant n$, $q < \infty$ и

$$1 \geqslant \frac{n}{p} - \frac{n}{q}, \tag{14.4.3}$$

причем в случае строгого неравенства в (14.4.3) это вложение компактно. При $p > n$ получается компактное вложение в $C(\overline{\Omega})$. Кроме того, в первом случае указываются условия непрерывности и компактности вложения в $L_q(\Omega_m)$, где Ω_m — пересечение области Ω с m-мерной гиперплоскостью.

Для распространения результатов на $W^1_p(\Omega)$ используется продолжение функций из этого пространства до функций из $\mathring{W}^1_p(\Omega_1)$ в более широкой ограниченной области Ω_1. Границу области Ω достаточно, следовательно, считать липшицевой. Результаты остаются теми же.

Для распространения результатов на случай пространства $\mathbb{R}^n$ оно покрывается одинаковыми областями, например шарами. Теряются только результаты о компактности вложения.

Для обобщения результатов на пространства $W_p^l(\Omega)$ с натуральным l (см. теоремы 14.1.2 и 14.1.3) можно, в частности, использовать индукцию по l.

Литература по теоремам вложения огромная. Эта тематика включает теоремы вложения в пространства на подмногообразиях меньшей размерности (простейший пример — теоремы о следах) и «обратные» теоремы — о построении операторов продолжения. Развиты новые подходы к доказательству теорем вложения. Помимо разработки интегральных представлений (не только через производные, но и через разности), возник подход с использованием аппроксимации функций тригонометрическими многочленами и целыми функциями экспоненциального типа. См. в первую очередь монографии С. М. Никольского [42], О. В. Бесова, В. П. Ильина и С. М. Никольского [8] и указанную там литературу. Как уже было упомянуто, используются также средства теории интерполяции.

14.5. Пространства H_p^s и B_p^s в липшицевых областях и на липшицевых поверхностях. (Ср. с [324].) Здесь через Ω обозначается ограниченная область с липшицевой границей Γ.

Данные в п. 14.1 определения пространств $H_p^s(\Omega)$ и $B_p^s(\Omega)$ сохраняются в случае липшицевой области при любых s. Безусловно основным остается случай $p=2$, в котором $H_2^s=B_2^s$ и индекс 2 опускается. Сохраняются также определения пространств $\widetilde{H}_p^s(\Omega)$, $\widetilde{B}_p^s(\Omega)$, $\mathring{H}_p^s(\Omega)$ и $\mathring{B}_p^s(\Omega)$.

Универсальный оператор продолжения функций из области во все пространство построен В. С. Рычковым именно для липшицевых областей. Он обслуживает все пространства $H_p^s(\Omega)$ и $B_p^s(\Omega)$ и более общие пространства в липшицевых областях, которые будут упомянуты в п. 14.7.

Поскольку есть оператор продолжения, пространства H и B в липшицевой области сохраняют многие свойства, указанные в предыдущих пунктах. Перечислим основные свойства.

Нормы целого неотрицательного порядка s в пространствах $H_p^s(\Omega)$ и нормы нецелого положительного порядка s в пространствах $B_p^s(\Omega)$ можно, как и раньше, вводить формулами Соболева—Слободецкого, и они эквивалентны нормам в исходном определении.

Сохраняются теоремы 14.3.1—14.3.3. Пространства $\widetilde{H}_p^s(\Omega)$ и $\mathring{H}_p^s(\Omega)$ можно отождествить при $0 \leqslant s < 1 + 1/p$, $s \neq 1/p$. То же верно для пространств B.

В $H_p^1(\Omega)$ и $B_p^1(\Omega)$ является мультипликатором оператор умножения на липшицеву функцию, точнее, на функцию из $C^{0,1}(\overline{\Omega})$.

На границе Γ липшицевой области пространства $H_p^s(\Gamma)$ и $B_p^s(\Gamma)$ *инвариантно* определены теперь только при $|s| \leqslant 1$. Выйти за пределы этого промежутка нельзя из-за того, что преобразования локальных координат являются в общем случае только липшицевыми. Более употребительны пространства $B_p^s(\Gamma)$ из-за их роли в теореме о следах.

Нормы в $B_p^s(\Gamma)$ при $s \in (0, 1)$ на такой поверхности локально можно вводить формулами Слободецкого, а в целом определять с использованием разбиения единицы.

Остается в силе утверждение о непрерывности, компактности и плотности вложения пространства $B_p^\sigma(\Gamma)$ в пространство $B_p^s(\Gamma)$ при $-1 \leqslant s < \sigma \leqslant 1$.

Во всех пространствах $B_p^s(\Gamma)$ оператор умножения на липшицеву функцию является мультипликатором.

Справедлива теорема об ограниченности перехода от функции к ее граничным значениям: это операторы, действующие ограниченным образом из $H_p^{s+1/p}(\Omega)$ и из $B_p^{s+1/p}(\Omega)$ в $B_p^s(\Gamma)$, но *только при* $0 < s < 1$. См. [80]. Подпирающий не очень простой пример обсуждается в работе [249]. Эти операторы имеют общий правый обратный.

Скажем несколько слов об очень содержательной книге [80]. Ее авторы занимаются вопросами о следах функций на (замкнутых) подмножествах в $\mathbb{R}^n$ и о возможности продолжения функций с подмножеств в $\mathbb{R}^n$ до функций в $\mathbb{R}^n$ с заданными свойствами. Последний вопрос изучал Уитни в отношении гладких функций [330, 331] при помощи тейлоровских разложений, и авторы следуют его идеям. Но их построения привязаны к пространствам Бесова на этих подмножествах и применимы в случае, когда подмножество — липшицева граница.

Однако в этой книге несколько иначе, чем у нас выше, определяется *след функции* на подмножестве. См. также [49, гл. VI, § 4]. Если задана функция $f(x)$, локально принадлежащая, скажем, $L_1(\mathbb{R}^n)$, то можно рассмотреть пределы

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} f(y)\, dy.$$

Здесь $B(x,r)$ — шар радиуса r с центром в x и $|B(x,r)|$ — его объем. Согласно теореме Лебега, почти всюду этот предел существует и совпадает с $f(x)$. Переопределив f на множестве нулевой меры, можно предположить, что это равенство выполняется во всех точках, в которых предел существует. После этого функция называется строго определенной. Ее сужение $f|_F$ на подмножество $F \subset \mathbb{R}^n$ определяется как поточечное сужение. Принадлежность следа к нужным пространствам исследуется (в теоремах о следах) или предполагается (в теоремах о продолжении).

Пространства $\widetilde{H}_{p'}^{-s}(\Omega)$ и $\widetilde{B}_{p'}^{-s}(\Omega)$ при $s > 1/p$ содержат непрерывные функционалы соответственно над $H_p^s(\Omega)$ и $B_p^s(\Omega)$, сосредоточенные на границе Γ. Они реализуются как функционалы на граничных значениях функций из этих пространств.

Пространства $B_p^s(\Gamma)$ и $B_{p'}^{-s}(\Gamma)$ сопряжены относительно продолжения естественного скалярного произведения на Γ на прямое произведение этих пространств.

Можно пользоваться пространствами B и на незамкнутых липшицевых поверхностях. Предположим, что замкнутая $(n-1)$-мерная липшицева поверхность Γ разделена лежащей на ней $(n-2)$-мерной липшицевой поверхностью Γ_0 на две открытые части Γ_1 и Γ_2, для простоты односвязные. В этом случае можно рассматривать пространства $B_p^s(\Gamma_1)$ и $B_p^s(\Gamma_2)$, $|s| \leqslant 1$. Пространство $B_p^s(\Gamma_1)$ ($|s| \leqslant 1$) можно определить как состоящее из сужений элементов из $B_p^s(\Gamma)$ с inf-нормой. Имеется ограниченный оператор продолжения функций из $B_p^s(\Gamma_1)$ до функций из $B_p^s(\Gamma)$: это вариант оператора Рычкова. При $-1/p' < s < 1/p$ ограниченным является оператор продолжения нулем. Пространство $\widetilde{B}_p^s(\Gamma_1)$ определяется как подпространство элементов из $B_p^s(\Gamma)$ с носителями в $\overline{\Gamma}_1$. При $-1/p' < s < 1/p$ пространства $B_p^s(\Gamma_1)$ и $\widetilde{B}_p^s(\Gamma_1)$ можно отождествить. Пространства $B_p^s(\Gamma_1)$ и $\widetilde{B}_{p'}^{-s}(\Gamma_1)$ взаимно сопряжены относительно продолжения стандартного скалярного произведения в $L_2(\Gamma_1)$ на прямое произведение этих пространств.

При $0 < s < 1/p$ две функции $u_1 \in B_p^s(\Gamma_1)$ и $u_2 \in B_p^s(\Gamma_2)$ составляют одну функцию из $B_p^s(\Gamma)$. При $1/p < s \leqslant 1$ это верно тогда и только тогда, когда граничные значения этих функций в $B_p^{s-1/p}(\Gamma_0)$ совпадают.

Все известные нам интерполяционные соотношения остаются справедливыми в липшицевых областях и на липшицевых поверхностях в естественных пределах. См. статью Трибеля [324].

14.6. Пространства с $p = 1$ и $p = \infty$. По аналогии с рассмотренными пространствами можно определить пространства W_p^s, H_p^s и B_p^s при $p = 1$ и $p = \infty$. Но при этом, как подчеркивают авторы монографий, не следует ожидать, что полностью обобщаются факты, известные для $1 < p < \infty$.

Пространство $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ при $p = 1$ и при $p = \infty$ можно определить как пространство таких функций f из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, что $\Lambda^s f \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Пространство $W_1^k(\mathbb{R}^n)$ при натуральном k — как пространство обобщенных функций, принадлежащих $L_1(\mathbb{R}^n)$ вместе с обобщенными производными порядка до k включительно. Нормы в этих пространствах записываются очевидным образом. См., например, [52, п. 2.3.3, замечание 5], [6, п. 6.2]. Но совпадения пространств $H_p^k(\mathbb{R}^n)$ с $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ при этих p, вообще говоря, нет. Трибель ссылается по этому поводу на [49]. См. [49, гл. V, п. 6.6]. Формула

$$[H_1^s(\mathbb{R}^n)]^* = H_\infty^{-s}(\mathbb{R}^n)$$

верна ([6, п. 6.2]), но поменять здесь местами нижние индексы нельзя, это нерефлексивные пространства.

Пространство B_∞^s в $\mathbb{R}^n$ при $s > 0$ — это введенное в § 1 гёльдерово пространство C_b^s при нецелом s. Пространство B_∞^{m+1} при целом $m \geqslant 0$ — это $C_b^{m,1}$ в § 1. См. [52], [80], [95].

14.7. Пространства Трибеля—Лизоркина и общие пространства Бесова. Приведем определения еще более общих пространств типа Соболева. Для этого воспользуемся системой функций $\varphi_k(x)$ из п. 1.14 или 10.1. Пусть сначала $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p < \infty$.

Пространство $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ *Трибеля—Лизоркина* определяется как состоящее из таких обобщенных функций $u \in \mathcal{S}'$, что конечна норма

$$\|u\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |2^{ks} \varphi_k * u|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{14.7.1}$$

В этой формуле сначала берется l_q-норма последовательности функций $\{2^{ks}(\varphi_k * u)(x)\}$, а затем от этой l_q-нормы берется L_p-норма.

Пространство $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ *Бесова* определяется как состоящее из таких обобщенных функций $u \in \mathcal{S}'$, что конечна норма

$$\|u\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|2^{ks} \varphi_k * u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^q \right)^{1/q}. \tag{14.7.2}$$

Здесь сначала вычисляются L_p-нормы тех же функций $2^{ks}(\varphi_k * u)(x)$, а затем от полученной числовой последовательности берется l_q-норма.

При $p=\infty$ и/или $q=\infty$ эти выражения сохраняют смысл с естественной модификацией: L_p-нормы заменяются на нормы в L_∞ и/или l_q-норма заменяется на норму в l_∞. Некоторая модификация определения на самом деле нужна для пространств $F^s_{\infty,q}$, см. [53], [95, с. 9], на этом не останавливаемся.

Отметим, что

$$F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n) = H^s_p(\mathbb{R}^n). \tag{14.7.3}$$

В частности, $F^s_{2,2}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$, см. п. 1.14. Далее,

$$B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = B^s_p(\mathbb{R}^n). \tag{14.7.4}$$

Кроме того, $B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$ и, в частности, $B^s_{2,2}(\mathbb{R}^n) = F^s_{2,2}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$. Легко видеть, что в этих случаях правые части формул (14.7.1) и (14.7.2) совпадают.

Эти новые пространства тоже банаховы. Определения распространяются также на $p \in (0,1)$ и $q \in (0,1)$, но при таких p и/или q пространства становятся квазибанаховыми.

В итоге пространства $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ и $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ определены при $0<p<\infty$ и пространства $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ — при $0<q\leqslant\infty$. Все они подробно изучаются, например, в [52, 53]. См. также сводку свойств этих пространств в [95].

В отношении общих пространств Бесова $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ добавим, что при $s>0$, $s=m+\theta$, где $m\in\mathbb{Z}_+$ и $0<\theta\leqslant 1$, $1\leqslant p<\infty$, $1\leqslant q<\infty$, норму в них можно определять выражением

$$\|u\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=m}\left(\int \frac{\|D^\alpha u(x+y) - D^\alpha u(x)\|^q_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|y|^{n+\theta q}}\,dy\right)^{1/q}. \tag{14.7.5}$$

При $q=\infty$ это выражение заменяется следующим:

$$\|u\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=m}\sup_{h\neq 0}\frac{\|D^\alpha u(x+h) - D^\alpha u(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^\theta}. \tag{14.7.6}$$

См. [80, с. 7], и [296].

Пространства Бесова с тремя индексами появляются, в частности, при вещественной интерполяции пространств с двумя индексами: при $s\neq t$ и $0<\theta<1$

$$(H^s_p, H^t_p)_{\theta,q} = B^{(1-\theta)s+\theta t}_{p,q}, \quad (B^s_p, B^t_p)_{\theta,q} = B^{(1-\theta)s+\theta t}_{p,q}. \tag{14.7.7}$$

См., например, [6, п. 6.4].

Пространства $F^s_{p,q}(\Omega)$ и $B^s_{p,q}(\Omega)$ в области Ω определяются, конечно, как состоящие из сужений элементов из соответствующих пространств в $\mathbb{R}^n$ с нормой inf. Оператор Рычкова обслуживает и эти пространства. Но его результаты позволяют написать для специальных липшицевых областей нормы (новые, но эквивалентные только что указанным) в этих пространствах, не использующие продолжений: это нормы вида (14.7.1) и (14.7.2) с $L_p(\Omega)$ вместо $L_p(\mathbb{R}^n)$. Система функций φ_j — такая же, как в п. 10.3. В частности, при $q=2$ и соответственно $q=p$ это нормы в $H_p^s(\Omega)$ и в $B_p^s(\Omega)$:

$$\|u\|_{H_p^s(\Omega)} = \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{2js} |\varphi_j * u|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_p(\Omega)} \tag{14.7.8}$$

и

$$\|u\|_{B_p^s(\Omega)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsp} \|\varphi_j * u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}. \tag{14.7.9}$$

Формула (14.7.8) особенно интересна при нецелом $s>0$ и при $s<0$, а формула (14.7.9) — при целом $s \geqslant 0$ (включая $s=0$) и при $s<0$.

В п. 16.3 пространства $B_{p,q}^s(\Omega)$ понадобятся для доказательства важной теоремы о гладкости решений задач Дирихле и Неймана в липшицевых областях. Там приведена дополнительная информация о них. У читателя будет повод в ней разобраться. Фактически там нужны случаи $q=\infty$ и 1.

§ 15. Приложения к общей теории эллиптических уравнений и граничных задач

15.1. Общие эллиптические задачи в пространствах Соболева—Слободецкого. Мы не будем останавливаться на уравнениях на замкнутых многообразиях и сразу рассмотрим общие скалярные эллиптические задачи из § 7 в ограниченной области с гладкой границей:

$$a(x,D)u(x) = f(x) \text{ в } \Omega, \tag{15.1.1}$$

$$b_j(x,D)u(x) = g_j(x) \text{ на } \Gamma \quad (j=1,\ldots,l). \tag{15.1.2}$$

Их можно рассматривать в существенно более общих пространствах, чем в § 7, в частности в следующих:

$$u \in W_p^s(\Omega), \quad f \in W_p^{s-2l}(\Omega), \quad g_j \in W_p^{s-r_j-1/p}(\Gamma), \quad 1<p<\infty. \tag{15.1.3}$$

Ограничимся такой постановкой. Для простоты считаем, что s целое и выполнен аналог условия (7.1.6):

$$s \geqslant 2l, \quad s > \max r_j + 1/p. \tag{15.1.4}$$

Отвечающий задаче оператор $\mathcal{A}\colon u \mapsto (f, g_1, \ldots, g_l)$ действует ограниченным образом из пространства решений в пространство правых частей. Сохраняется основной результат: эллиптичность задачи эквивалентна фредгольмовости этого оператора. Выпишем априорную оценку:

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} \leqslant C_1 \left[\|f\|_{W_p^{s-2l}(\Omega)} + \sum_1^l \|g_j\|_{W_p^{s-r_j-1/p}(\Gamma)} + \|u\|_{L_p(\Gamma)} \right]. \qquad (15.1.5)$$

Эта оценка доказана в [1] методом замораживания коэффициентов, но со следующим изменением: решение задачи в полупространстве для операторов с постоянными коэффициентами без младших членов записывается в x-представлении, без преобразования Фурье, для чего в явном виде вычисляются ядра соответствующих интегральных операторов и устанавливаются нужные свойства ограниченности этих операторов. В частности, используются известные теоремы об ограниченности сингулярных интегральных операторов [214].

Заметим, что в [1] априорные оценки выведены сначала в гёльдеровских нормах ($u \in C^s(\overline{\Omega})$ с *нецелым* достаточно большим s). Такие оценки называют *шаудеровскими* по имени математика Шаудера, в работах которого они впервые появились [297, 298].

Если есть единственность, то последнее слагаемое справа в (15.1.5) опускается. Справедлива на самом деле двусторонняя оценка (в силу упомянутой выше ограниченности оператора $\mathcal{A}$).

Справедлива и теорема о регулярности решений, которую мы не будем формулировать. В сущности в § 7 и здесь речь идет об одной и той же задаче, и смысл такой теоремы состоит в том, что гладкость решения адекватно определяется гладкостью правых частей.

Далее, остается в силе результат об однозначной разрешимости задач (7.1.19), (7.1.4), эллиптических с параметром вдоль луча, при больших по модулю значениях параметра на этом луче. Априорная оценка при $s = 2l > r_j$ и однородных граничных условиях имеет вид

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} + |\lambda| \|u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C_2 \|f\|_{L_p(\Omega)}. \qquad (15.1.6)$$

При бесконечной гладкости границы и коэффициентов собственные и присоединенные функции спектральных задач являются бесконечно гладкими и поэтому принадлежат всем рассматриваемым пространствам. Если говорить о задачах со спектральным параметром в уравнении, то это пространства $W_p^s(\Omega)$. Собственные значения, конечно, тоже не зависят от s и p. Есть результаты о полноте корневых функций в этих пространствах.

См. [178], [186] и [185].

15.2. Обобщения. В работе [179] результаты об априорных оценках из [1] распространены на системы, эллиптические по Дуглису—Ниренбергу. В работе Л. Р. Волевича[131] тоже доказаны эти оценки и построен правый параметрикс, чем завершено доказательство теоремы об эквивалентности эллиптичности и фредгольмовости для систем в пространствах W_p^s. Параллельно все это сделано в работах В. А. Солонникова [162–164].

Относительно обобщений теории на пространства Трибеля—Лизоркина и общие пространства Бесова можно смотреть [53], [237], а также сводку результатов в [95, гл. II] (там рассматриваются скалярные задачи с нормальными граничными условиями) и приведенные там ссылки.

Мотивировкой для рассмотрений задач в столь общих пространствах чаще всего является подготовка к переходу к нелинейным эллиптическим задачам, см. [95]. Но при этом обычно важна минимизация предположений о гладкости коэффициентов.

§ 16. Приложения к граничным задачам в липшицевой области

16.1. Постановки задач Дирихле и Неймана. В этом параграфе будем для простоты предполагать коэффициенты $a_{j,k}$ и b_j липшицевыми (хотя в конкретных ситуациях возможны более экономные предположения). Всюду в этом параграфе

$$|s| < 1/2, \quad 1 < p, \quad p' < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad t = 1/p. \tag{16.1.1}$$

Вариационные (точнее, слабые) постановки задач Дирихле и Неймана уже были обобщены на ненулевые s в п. 11.7; теперь мы пойдем дальше. Решения в Ω задач с однородными граничными условиями по-прежнему определяем формулой Грина

$$(f, v)_\Omega = \Phi_\Omega(u, v). \tag{16.1.2}$$

Но теперь в случае задачи Дирихле

$$\begin{gathered} u \in \widetilde{H}_p^{1/2+s+1/p}(\Omega), \quad f \in H_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega), \\ v \in \widetilde{H}_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega), \end{gathered} \tag{16.1.3}$$

а в случае задачи Неймана сначала

$$\begin{gathered} u \in H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega), \quad f \in \widetilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega), \\ v \in H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega). \end{gathered} \tag{16.1.4}$$

В силу известного нам утверждения о дуальности (упомянутого в п. 14.5) в обоих случаях правая часть f и пробная функция v находятся в дуальных пространствах. Разность верхних индексов в пространствах для u и для f равна 2. Ограничение, наложенное на s в (16.1.1), снова диктуется теоремой о следе. Допустимые точки (s,t) образуют квадрат

$$Q = \{(s,t) : |s| < 1/2,\ 0 < t < 1\}. \tag{16.1.5}$$

Исходная постановка задач отвечает центру этого квадрата. Результаты об однозначной разрешимости получаются далеко не во всех его точках, см. п. 16.6. Что именно получается, будет объяснено ниже.

Форма $\Phi_\Omega(u,v)$ ограничена на прямом произведении пространств для u и v. Проверим это для простоты в случае отсутствия младших членов. Имеем, например, в случае задачи Неймана

$$\begin{aligned} |\Phi_\Omega(u,v)| &\leqslant C \sum |(\partial_k u, \partial_j v)_\Omega| \leqslant \\ &\leqslant C' \sum \|\partial_k u\|_{\widetilde{H}_p^{-1/2+s+1/p}(\Omega)} \|\partial_j v\|_{H_{p'}^{1/2-s-1/p}(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant C'' \|u\|_{H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)} \|v\|_{H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{16.1.6}$$

Поясним, что здесь

$$\widetilde{H}_p^{-1/2+s+1/p}(\Omega) = H_p^{-1/2+s+1/p}(\Omega) \quad \text{при } |s| < 1/2,$$

так как последнее неравенство равносильно включению

$$-1/2 + s + 1/p \in (-1/p', 1/p)$$

(см. теорему 14.3.3 и соответствующее замечание в п. 14.5), и что $1/2 - s - 1/p = -1/2 - s + 1/p'$.

Далее, отвечающие задачам Дирихле и Неймана с однородными граничными условиями операторы $\mathcal{L}_D$ и $\mathcal{L}_N$ ограничены соответственно из $\widetilde{H}_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)$ в $H_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)$ и из $H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)$ в $\widetilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)$. Это следует из формулы Грина и утверждений о двойственности. Например, в задаче Неймана (снова для простоты считаем, что нет младших членов)

$$\|Lu\|_{\widetilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)} \leqslant C_1 \sup_{v\neq 0} \frac{|(Lu,v)_\Omega|}{\|v\|_{H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega)}} = \\ = \sup_{v\neq 0} \frac{|\Phi_\Omega(u,v)|}{\|v\|_{H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega)}} \leqslant C_2 \|u\|_{H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)}$$

в силу (16.1.6).

В случае задачи Дирихле с неоднородным граничным условием

$$Lu = f \text{ в } \Omega, \quad u^+ = g \tag{16.1.7}$$

мы предполагаем, что $u \in H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)$, $g \in B_p^{1/2+s}(\Gamma)$. В отношении f считаем, что $f \in H_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)$ (ср. с п. 11.1), и действуем по такому же плану, что и в пунктах 11.1 и 11.7. Пусть u_0 — любая функция из $H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)$ с граничным значением g. Определим $f_0 = Lu_0 \in H_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)$ формулой

$$(f_0, v)_\Omega = \Phi_\Omega(u_0, v), \quad v \in \widetilde{H}_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega). \tag{16.1.8}$$

Решением задачи (16.1.7) *назовем* функцию $u = u_0 + u_1$, где u_1 — решение задачи

$$Lu_1 = f - f_0 \text{ в } \Omega, \quad u_1^+ = 0, \tag{16.1.9}$$

если, конечно, оно существует, т. е. u_1 определяется равенством

$$(f - f_0, v)_\Omega = \Phi_\Omega(u_1, v) \quad v \in \widetilde{H}_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega). \tag{16.1.10}$$

Как в п. 11.1, можно проверить, что решение u не зависит от выбора u_0, если есть и единственность. Получается, что задача Дирихле с неоднородным граничным условием при данных s и p однозначно разрешима, если это верно для задачи Дирихле с однородным граничным условием.

В задаче Неймана определяем конормальную производную полной формулой Грина

$$(Lu, v)_\Omega = \Phi_\Omega(u, v) - (T^+u, v)_\Gamma. \tag{16.1.11}$$

Как легко проверить, она принадлежит $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$, и оператор $(u, f) \mapsto T^+u$ ограничен. Таким образом, в неоднородной задаче

Неймана

$$Lu = f \text{ в } \Omega, \quad T^+u = h \tag{16.1.12}$$

считаем (пока), что

$$\begin{gathered} u \in H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega), \quad h = T^+u \in B_p^{-1/2+s}(\Gamma), \\ f \in \widetilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega). \end{gathered} \tag{16.1.13}$$

Неоднородное граничное условие Неймана сводится к однородному изменением f.

Очень важен вопрос, на какие s и p можно распространить результаты об однозначной разрешимости или фредгольмовости, известные нам при $s=0$ и $p=2$. К этому вопросу есть три общих подхода. Первый — использование так называемых тождеств Реллиха. Мы кратко обсудим его в следующем пункте. Второй — обобщенная теорема Саваре о гладкости решений вариационных задач. Ему посвящен п. 16.3. Оба этих подхода применимы, если $p=2$. Таким образом, в этих двух пунктах мы останемся в рамках постановок из п. 11.7. В частности, мы докажем утверждения, которые были сформулированы в теореме 11.7.3 для систем с формально самосопряженной главной частью. Третий подход — использование теоремы Шнейберга (п. 13.7), здесь рассматриваются также $p \neq 2$. Следствия из этой теоремы и наиболее общие известные автору к настоящему времени (декабрь 2012 г.) результаты мы приведем в п. 16.4. Здесь завершается доказательство теоремы 11.7.3.

В конкретных ситуациях есть другие результаты, более сильные, но более специальные; некоторые из них будут упомянуты в замечаниях к настоящему параграфу в § 18.

16.2. Тождества Реллиха и следствия из них. Мы не приводим доказательства в этом пункте, их можно найти в [87] или в [91]. Удивительное тождество, открытое Реллихом в случае уравнения Лапласа [291] и распространенное на системы в работе Пайна—Вайнбергера [285], состоит в следующем. (Эти авторы рассматривали совсем другие задачи.) Звездочкой обозначается переход от данной матрицы (которая может быть и столбцом) к эрмитово сопряженной матрице. Значком $^+$ обозначаем след функции.

Лемма 16.2.1. *Пусть область Ω липшицева, и пусть $h_1, \ldots, h_n$ — вещественнозначные функции в Ω, ограниченные вместе с первы-*

ми производными в смысле обобщенных функций. Тогда для вектор-функций $u, v \in H^2(\Omega)$ *выполняется равенство*

$$\sum_{j,k,l} \int_\Gamma \nu_l \{[(h_l a_{j,k} - h_j a_{l,k} - h_k a_{j,l})\partial_k u]^* \partial_j v\}^+ ds =$$

$$= \sum_{j,k} \int_\Omega [(D_{j,k}\partial_k u)^* \partial_j v + (L_0 u)^*(h_j \partial_j v) + (h_k \partial_k u)^*(\widetilde{L}_0 v)]\, dx, \quad (16.2.1)$$

где

$$D_{j,k} = \sum_l \left[\partial_l(h_l a_{j,k}) - (\partial_l h_j)a_{l,k} - (\partial_l h_k)a_{j,l}\right]. \quad (16.2.2)$$

Лемма выводится из многомерного варианта теоремы Гаусса—Остроградского (английский термин divergence theorem). Она используется в (непростом) доказательстве следующей теоремы.

Теорема 16.2.2. *Пусть* L *— сильно эллиптический оператор с формально самосопряженной старшей частью:* $a^*_{j,k} = a_{k,j}$. *Пусть*

$$Lu = f \ \text{ в } \ \Omega, \quad (16.2.3)$$

где $u \in H^1(\Omega)$, *но* $f \in L_2(\Omega)$. *Тогда:*

1. *Если* $u^+ \in H^1(\Gamma)$, *то* $T^+ u \in L_2(\Gamma)$ *и справедливо неравенство*

$$\|T^+ u\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant C[\|u^+\|_{H^1(\Gamma)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L_2(\Omega)}]. \quad (16.2.4)$$

2. *Если* L *— скалярный оператор, т. е.* $m = 1$, *с вещественными коэффициентами* $a_{j,k} = a_{k,j}$ *и если* $T^+ u \in L_2(\Gamma)$, *то* $u^+ \in H^1(\Gamma)$ *и справедливо неравенство*

$$\|u^+\|_{H^1(\Gamma)} \leqslant C[\|T^+ u\|_{L_2(\Gamma)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L_2(\Omega)}]. \quad (16.2.5)$$

Фактически следствием из первого утверждения этой теоремы является следующее утверждение.

Теорема 16.2.3. *Пусть старшая часть оператора* L *формально самосопряженная и для задачи Дирихле имеет место сильная коэрцитивность. Тогда оператор Дирихле* D *действует ограниченным образом из* $H^{1/2+s}(\Gamma)$ *в* $H^{-1/2+s}(\Gamma)$ *при* $|s| < 1/2$. *Кроме того, оператор, переводящий данные Дирихле в решение однородного уравнения* $Lu = 0$, *продолжается до ограниченного оператора из* $L_2(\Gamma)$ *в* $L_2(\Omega)$. *То же верно для формально сопряженной системы.*

Если для решения задачи Дирихле при гладких правых частях в системе и условии Дирихле оказывается гладкой и конормальная производная, то и решение оказывается гладким в силу формул представления решений через их данные Коши типа (12.3.8) (с учетом обсуждения в п. 12.11). Дальше можно воспользоваться интерполяцией. Поэтому теорема 16.2.3 приводит к результату о регулярности решений для задачи Дирихле в случае формальной самосопряженности главной части системы. Такие результаты о регулярности получаются и для решений задачи Неймана, но в существенно меньшей общности — в скалярном случае, а также для системы Ламе: для нее тождества Реллиха указаны в [225].

В следующем пункте излагается другой подход и существенно более общий результат о регулярности.

16.3. Обобщенная теорема Саваре. В этом пункте мы доказываем утверждения теоремы 11.7.3, относящиеся к формально самосопряженному оператору. Это обобщения содержащегося в работе [296] результата для скалярного уравнения

$$-\operatorname{div} a(x) \operatorname{grad} u(x) = f(x)$$

с симметричной вещественной матрицей $a(x)$. В [296] рассматриваются и другие уравнения, в том числе абстрактные и нелинейные. Свой метод Саваре называет модификацией метода Ниренберга разностных отношений. Ср. с п. 16.5.

Мы рассматриваем сначала формально самосопряженную систему

$$Lu := -\sum \partial_j a_{j,k}(x) \partial_k u(x) + \tau u(x) = f(x) \tag{16.3.1}$$

с однородными условиями Дирихле или Неймана в ограниченной липшицевой области Ω. В первом случае система предполагается сильно эллиптической, а положительное число τ настолько большим, что соответствующая форма Φ_Ω сильно коэрцитивна на $\widetilde{H}^1(\Omega)$. Во втором случае она предполагается сильно коэрцитивной на $H^1(\Omega)$. В случае задачи Неймана предполагается выполненным дополнительное условие (11.7.4) вблизи границы.

Следующая теорема содержит основное продвижение в настоящем пункте. Читателя ожидает непростое доказательство этого важного результата.

Теорема 16.3.1. *Пусть выполнены только что указанные предположения, и пусть* $s \in (0, 1/2)$.

1. *Если* $f \in H^{-1+s}(\Omega)$, *то решение задачи Дирихле принадлежит* $\widetilde{H}^{1+s}(\Omega)$.

2. *Если* $f \in \widetilde{H}^{-1+s}(\Omega)$, *то решение задачи Неймана принадлежит* $H^{1+s}(\Omega)$.

Отсюда вытекает однозначная разрешимость задач для этих систем в пространствах, индексы которых сдвинуты на s.

Сначала мы подробно рассмотрим задачу Неймана. В конце доказательства кратко укажем изменения, нужные в случае задачи Дирихле.

Как в [296], нам нужна информация о пространствах Бесова с тремя индексами и в дальнейшем также об интерполяционных соотношениях с этими пространствами. Приведем непосредственное определение пространства $B^s_{2,\infty}(\Omega)$ с нецелым $s > 0$, удобное при рассмотрении задачи Неймана. Пусть d — малое положительное число. Обозначим через Ω^d множество точек области Ω, отстоящих от ее границы больше чем на d. Пусть $\sigma \in (0, 1)$, и пусть Λ — множество векторов, порождающее $\mathbb{R}^n$ и звездное относительно начала координат. Например, это может быть выпуклый конус с вершиной в начале. Для функций v в Ω определим полунорму $[v]_{\sigma,\Omega}$ равенством

$$[v]^2_{\sigma,\Omega} = \sup_{h \in \Lambda \setminus 0,\, |h| < d} |h|^{-2\sigma} \int\limits_{\Omega^{|h|}} |v(x+h) - v(x)|^2\, dx. \tag{16.3.2}$$

Норму в $B^s_{2,\infty}(\Omega)$ при нецелом $s > 0$ можно определить равенством

$$\|v\|_{B^s_{2,\infty}(\Omega)} = \|v\|_{H^{[s]}(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = [s]} [\partial^\alpha v]_{s-[s],\Omega}. \tag{16.3.3}$$

Пространство $B^s_{2,\infty}(\Omega)$ определяется как пополнение линеала $C^\infty(\overline{\Omega})$ по этой норме. В частности, $\|u\|_{L_2(\Omega)} + [u]_{1/2,\Omega}$ можно принять за норму в $B^{1/2}_{2,\infty}(\Omega)$ и $\|u\|_{H^1(\Omega)} + [\nabla u]_{1/2,\Omega}$ — за норму в $B^{3/2}_{2,\infty}(\Omega)$. Ср. с (14.7.6).

В этих пространствах возможна локализация (играющая в дальнейшем существенную роль). Пусть замыкание $\overline{\Omega}$ покрыто конечной системой открытых шаров O_j $(j = 0, \ldots, N)$, и пусть $\sum\limits_j \varphi_j \equiv 1$ — разбиение единицы в окрестности множества $\overline{\Omega}$, состоящее из гладких функций φ_j с носителями в O_j. Тогда

$$\|u\|_{B^s_{2,\infty}(\Omega)} \leqslant C' \sum \|\varphi_j u\|_{B^s_{2,\infty}(O_j \cap \Omega)} \leqslant C'' \|u\|_{B^s_{2,\infty}(\Omega)}, \tag{16.3.4}$$

где C', C'' — постоянные. Это позволяет по-разному выбирать множества Λ для разных шаров O_j, имеющих общие точки с границей.

Пусть $u \in H^1(\Omega)$ — решение задачи Неймана при указанных выше предположениях. Следующее утверждение является ключевым.

Предложение 16.3.2. *Пусть правая часть f системы* (16.3.1) *принадлежит пространству $L_2(\Omega)$. Тогда решение $u(x)$ принадлежит пространству Бесова $B^{3/2}_{2,\infty}(\Omega)$ и справедливо неравенство*

$$\|u\|^2_{B^{3/2}_{2,\infty}(\Omega)} \leqslant C_1 \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \tag{16.3.5}$$

с не зависящей от $u(x)$ постоянной C_1.

Из этого предложения теорема будет выведена при помощи интерполяции.

Начнем с некоторой подготовки к доказательству предложения.

Положим

$$\Phi_\tau(u, v) = \Phi_\Omega(u, v) + \tau(u, v)_\Omega, \quad \Phi_\tau(v) = \Phi_\tau(v, v). \tag{16.3.6}$$

В силу предположения о сильной коэрцитивности на $H^1(\Omega)$ имеем

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant C_2 \Phi_\tau(v). \tag{16.3.7}$$

Липшицева поверхность, как мы отметили в п. 9.1, обладает равномерным свойством конуса. Каждая точка x_0 на Γ является вершиной двух прямых круговых конусов $\Upsilon_+(x_0)$ и $\Upsilon_-(x_0)$, конгруэнтных фиксированному конусу и лежащих соответственно внутри Ω и внутри дополнения к Ω, кроме вершины x_0. Локально оси этих конусов можно выбирать параллельными. При рассмотрении задачи Неймана понадобятся конусы Υ_+. Пусть ρ_0 — высота этих конусов.

Через $\Lambda = \Lambda(x_0)$, $x_0 \in \Gamma$, обозначим множество таких векторов $h \in \mathbb{R}^n$, выходящих из начала, что $x_0 + h \in \Upsilon_+(x_0)$. Через $\Omega_\rho = \Omega_\rho(x_0)$ обозначим пересечение области Ω с шаром $O_\rho(x_0)$ радиуса ρ с центром в x_0. Далее понадобятся также $\Omega_{2\rho}$ и $\Omega_{3\rho}$. Направление оси конуса $\Upsilon_+(x_0)$ и числа $\rho \in (0, \rho_0)$ и $d(x_0) \in (0, \rho)$ зафиксируем так, что

$$x \in \Omega_{2\rho}(x_0), \quad h \in \Lambda(x_0), \quad |h| \leqslant d(x_0) \ \Rightarrow \ x + h \in \Omega_{3\rho}(x_0). \tag{16.3.8}$$

Эти числа ρ и d можно считать не зависящими от x_0.

Пусть $\varphi(x)$ — бесконечно гладкая вещественная скалярная функция со значениями на $[0, 1]$, равная 1 в $O_\rho(x_0)$ и нулю вне $O_{2\rho}(x_0)$. Эти функции можно предположить сдвигами $\psi(x - x_0)$ фиксированной функции $\psi(x)$.

Положим

$$v_h(x) = \varphi(x)[u(x+h) - u(x)]. \tag{16.3.9}$$

Ввиду (16.3.7)

$$\|v_h\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant C_2 \Phi_\tau(v_h). \tag{16.3.10}$$

Мы хотим вывести оценку

$$\Phi_\tau(v_h) \leqslant C_3 |h| \|u\|_{H^1(\Omega_{3\rho})} [\|f\|_{L_2(\Omega_{2\rho})} + \|u\|_{H^1(\Omega_{3\rho})}]. \tag{16.3.11}$$

Она позволит получить неравенство (16.3.5).

Здесь и дальше $h \in \Lambda(x_0)$ и $|h| \leqslant d(x_0) < \rho$.

Условимся обозначать многоточием слагаемые, оцениваемые через правую часть в (16.3.11).

Нам понадобится формула Адамара

$$g(x+h) - g(x) = \sum_1^n h_j \int_0^1 \partial_j g(x+th)\,dt \tag{16.3.12}$$

для функций класса C^1. Из нее для норм по x при помощи неравенства Шварца для интеграла по t и перестановки интегралов получается неравенство

$$\|g(x+h) - g(x)\|^2_{L_2(G)} \leqslant C_4 |h|^2 \|g\|^2_{H^1(\widetilde{G})}. \tag{16.3.13}$$

Здесь $G \subset \widetilde{G}$ — некоторые подобласти области Ω, для которых $G + th \subset \subset \widetilde{G}$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Неравенство распространяется на функции из $H^1(G)$.

В частности, это неравенство позволяет «выносить» множитель φ из-под знака производной

$$\partial_k[\varphi(x)(u(x+h) - u(x))] \quad \text{или} \quad \partial_j[\varphi(x)(\overline{u(x+h)} - \overline{u(x)})]$$

в выражении под знаком оцениваемого интеграла. Поясним, что если мы дифференцируем $\varphi(x)$, то к разности $u(x+h) - u(x)$ или соответственно $\overline{u(x+h)} - \overline{u(x)}$ можем применить неравенство (16.3.13). И наоборот, например, в выражении

$$\varphi^2(x)\partial_j[\overline{u(x+h)} - \overline{u(x)}]$$

мы можем «внести» $\varphi^2(x)$ под знак производной.

Доказательство предложения 16.3.2. Очевидно, что

$$\tau(v_h, v_h)_\Omega = \ldots. \tag{16.3.14}$$

Поэтому будем доказывать оценку (16.3.11) для $\Phi_0(v_h)$. Вынося φ из-под знаков производных, имеем

$$\Phi_0(v_h) =$$

$$= \int_\Omega \varphi^2(x) \sum a_{j,k}(x) \partial_k [u(x+h) - u(x)] \cdot \partial_j [\overline{u(x+h)} - \overline{u(x)}]\, dx + \ldots =$$

$$= I_1 - I_2 - I_3 - I_4 + \ldots, \tag{16.3.15}$$

где

$$I_1 = \int_\Omega \varphi^2(x) \sum a_{j,k}(x) \partial_k u(x+h) \cdot \partial_j \overline{u(x+h)}\, dx,$$

$$I_2 = \int_\Omega \varphi^2(x) \sum a_{j,k}(x) \partial_k u(x) \cdot \partial_j \overline{u(x)}\, dx,$$

$$I_3 = \int_\Omega \varphi^2(x) \sum a_{j,k}(x) \partial_k u(x) \cdot \partial_j [\overline{u(x+h)} - \overline{u(x)}]\, dx,$$

$$I_4 = \int_\Omega \varphi^2(x) \sum a_{j,k}(x) \partial_k [u(x+h) - u(x)] \cdot \partial_j \overline{u(x)}\, dx.$$

В выражении для I_3 вносим φ^2 под знак ∂_j:

$$I_3 = \Phi_0(u, \varphi v_h) + \ldots.$$

Аналогично

$$I_4 = \Phi_0(\varphi v_h, u) + \ldots.$$

Поскольку u — решение, имеем

$$\Phi_0(u, \varphi v_h) = -\tau(u, \varphi v_h)_\Omega + (f, \varphi v_h)_\Omega = \ldots. \tag{16.3.16}$$

В отношении I_4 такого равенства у нас нет. Но с учетом формальной самосопряженности оператора L, которая здесь существенно используется, получаем

$$I_4 = \overline{\Phi_0(u, \varphi v_h)} + \ldots = \overline{I_3} + \ldots = \ldots. \tag{16.3.17}$$

Остается оценить $I_1 - I_2$. Эти интегралы по Ω равны интегралам по $\Omega_{2\rho}$, так как вне $O_{2\rho}$ функция $\varphi(x)$ равна нулю. Пользуясь липшицевостью функций $\varphi^2(x)a_{j,k}(x)$, перепишем I_1 в виде

$$I_1 = \int\limits_{\Omega_{2\rho}} \varphi^2(x+h) \sum a_{j,k}(x+h)\partial_k u(x+h)\partial_j \overline{u(x+h)}\,dx + \ldots$$

и сделаем замену $x+h$ на x:

$$I_1 = \int\limits_{\Omega_{2\rho}+h} \varphi^2(x) \sum a_{j,k}(x)\partial_k u(x)\partial_j \overline{u(x)}\,dx + \ldots. \tag{16.3.18}$$

Теперь, обозначая $\varphi^2(x) \sum a_{j,k}(x)\partial_k u(x)\partial_j \overline{u(x)}$ через $U(x)$, мы имеем

$$I_1 - I_2 = \int\limits_{[\Omega_{2\rho}+h]\setminus\Omega_{2\rho}} U(x)\,dx - \int\limits_{\Omega_{2\rho}\setminus[\Omega_{2\rho}+h]} U(x)\,dx + \ldots. \tag{16.3.19}$$

Первый из этих двух интегралов равен нулю, так как $\varphi(x) = 0$ на области интегрирования. Второй мы опустим, пользуясь предположением (11.7.4) о неотрицательности подынтегрального выражения.

Мы получили неравенство (16.3.11).

Конструкция и результат распространяются на внутренние точки области. Но там можно обойтись без дополнительного условия, заменяя интеграл

$$\int\limits_{\Omega_{2\rho}\setminus[\Omega_{2\rho}+h]} U(x)\,dx$$

аналогичным интегралом с $\varphi(x-h)$ (вместо $\varphi(x)$), эта функция равна нулю вне $\Omega_{2\rho}+h$.

Из покрытия замыкания $\overline{\Omega}$ окрестностями O_ρ выбираем конечное подпокрытие. Используя неравенства (16.3.10) и (16.3.11), а также оценки

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_5\|f\|_{\widetilde{H}^{-1}(\Omega)} \leqslant C_6\|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{16.3.20}$$

в итоге приходим к неравенству (16.3.5). □

Приведем теперь нужные интерполяционные соотношения. Имеется в виду вещественная интерполяция. Первые шесть соотношении можно принять за определения пространств B справа. В этих соотношениях $0 < s < 1$ и $1 \leqslant q \leqslant \infty$ (реально нужны $q = 1$ и ∞). Для $\mathbb{R}^n$ формулы содержатся в книгах [6, п. 6.4] и [52, 53].

$$(L_2(\Omega), H^1(\Omega))_{s,q} = B^s_{2,q}(\Omega), \tag{16.3.21}$$

$$(L_2(\Omega), H^{-1}(\Omega))_{s,q} = B^{-s}_{2,q}(\Omega), \tag{16.3.22}$$

$$(H^1(\Omega), H^2(\Omega))_{s,q} = B^{1+s}_{2,q}(\Omega), \tag{16.3.23}$$

$$(L_2(\Omega), \widetilde{H}^1(\Omega))_{s,q} = \widetilde{B}^s_{2,q}(\Omega), \tag{16.3.24}$$

$$(L_2(\Omega), \widetilde{H}^{-1}(\Omega))_{s,q} = \widetilde{B}^{-s}_{2,q}(\Omega), \tag{16.3.25}$$

$$(\widetilde{H}^1(\Omega), \widetilde{H}^2(\Omega))_{s,q} = \widetilde{B}^{1+s}_{2,q}(\Omega). \tag{16.3.26}$$

Далее, при $t \in (0, 1)$ и $1 \leqslant q \leqslant \infty$ справедливы следующие формулы. Напомним, что $H^s = B^s_{2,2}$, так что речь идет об интерполяции по верхнему и нижнему правому индексу. Пространства справа не зависят от q.

$$(H^1(\Omega), B^{1+s}_{2,q}(\Omega))_{t,2} = H^{1+ts}(\Omega), \tag{16.3.27}$$

$$(H^{-1}(\Omega), B^{-1+s}_{2,q}(\Omega))_{t,2} = H^{-1+ts}(\Omega), \tag{16.3.28}$$

$$(\widetilde{H}^1(\Omega), \widetilde{B}^{1+s}_{2,q}(\Omega))_{t,2} = \widetilde{H}^{1+ts}(\Omega), \tag{16.3.29}$$

$$(\widetilde{H}^{-1}(\Omega), \widetilde{B}^{-1+s}_{2,q}(\Omega))_{t,2} = \widetilde{H}^{-1+ts}(\Omega). \tag{16.3.30}$$

Доказательство теоремы 16.3.1. Пусть $\mathcal{L}_N$ — отвечающий задаче Неймана оператор $u \to f$. Из (16.3.5) и левого неравенства в (16.3.20) следует, что

$$\|u\|^2_{B^{3/2}_{2,\infty}(\Omega)} \leqslant C_{12} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|f\|_{\widetilde{H}^{-1}(\Omega)}. \tag{16.3.31}$$

Отсюда в силу теоремы 13.8.5 следует, что оператор $\mathcal{L}_N^{-1}$ действует ограниченным образом как оператор

$$(\widetilde{H}^{-1}(\Omega), L_2(\Omega))_{1/2,1} \mapsto B^{3/2}_{2,\infty}(\Omega). \tag{16.3.32}$$

Здесь слева перестановка пространств возможна в силу первого из пяти свойств вещественной интерполяции, приведенных в п. 13.3, с $\theta = 1 - \theta = 1/2$. Кроме того, $\mathcal{L}_N^{-1}$ — ограниченный оператор из $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$. Значит, это ограниченный оператор

$$(\widetilde{H}^{-1}(\Omega), (\widetilde{H}^{-1}(\Omega), L_2(\Omega))_{1/2,1})_{t,2} \mapsto (H^1(\Omega), B^{3/2}_{2,\infty}(\Omega))_{t,2} \tag{16.3.33}$$

при $t \in (0,1)$. В силу формул (16.3.25) (с тем же θ; снова возможна перестановка пространств) и (16.3.27) это ограниченный оператор

$$(\widetilde{H}^{-1}(\Omega), \widetilde{B}^{-1/2}_{2,1}(\Omega))_{t,2} \mapsto H^{1+t/2}(\Omega),$$

и в силу формулы (16.3.30) — ограниченный оператор

$$\widetilde{H}^{-1+t/2}(\Omega) \mapsto H^{1+t/2}(\Omega).$$

Заменяя $t/2$ на s, получаем утверждение теоремы для задачи Неймана.

В случае задачи Дирихле нужно сделать очевидную замену пространств $H^{1+s}(\Omega)$ на $\widetilde{H}^{1+s}(\Omega)$ и $\widetilde{H}^{-1+s}(\Omega)$ на $H^{-1+s}(\Omega)$. Функцию $u(x)$ удобно считать равной нулю вне Ω. Сдвиги h делаются не внутрь области Ω, а внутрь ее дополнения, т. е. в конусы Υ_-. Делается это для того, чтобы функция $v_h(x)$ принадлежала пространствам $\widetilde{H}^{1+s}(\Omega)$ вместе с u. Ср. с [296]. Но это позволяет обойтись без дополнительного условия (11.7.4) и вблизи граничных точек, заменяя в интеграле I_2 функцию $\varphi(x)$ на $\varphi(x-h)$.

Соответственно для оператора $\mathcal{L}_D$, отвечающего задаче Дирихле, последовательно имеем ограниченность $\mathcal{L}_D^{-1}$ как оператора

$$(H^{-1}(\Omega), (H^{-1}(\Omega), L_2(\Omega))_{1/2,1})_{t,2} \mapsto (\widetilde{H}^{1}(\Omega), \widetilde{B}^{3/2}_{2,\infty}(\Omega))_{t,2}, \qquad (16.3.34)$$

в силу формул (16.3.22) и (16.3.29) — как оператора

$$(H^{-1}(\Omega), B^{-1/2}_{2,1}(\Omega))_{t,2} \mapsto \widetilde{H}^{1+t/2}(\Omega)$$

и в силу формулы (16.3.28) — как оператора

$$H^{-1+t/2}(\Omega) \mapsto \widetilde{H}^{1+t/2}(\Omega).$$

Снова остается заменить $t/2$ на s.

Полученные результаты обобщаются на случай системы с формально самосопряженной старшей частью и произвольными младшими членами. В случае матричной задачи Неймана предполагается выполненным дополнительное условие (11.7.4) *вблизи границы.* Это легко: достаточно младшие члены перенести в правую часть уравнения. В следующей теореме имеется в виду уже общий случай.

Теорема 16.3.3. *При тех же предположениях, что и в теореме* 16.3.1, *для задач с однородными граничными условиями справедливы следующие утверждения.*

1. *Для $|s| < 1/2$ задача Дирихле с правой частью $f \in H^{-1+s}(\Omega)$ имеет одно и только одно решение в $\widetilde{H}^{1+s}(\Omega)$.*

2. *Для* $|s|<1/2$ *задача Неймана с правой частью* $f\in\widetilde{H}^{-1+s}(\Omega)$ *имеет одно и только одно решение в* $H^{1+s}(\Omega)$.

При $s\in(0,1/2)$ утверждения получаются сразу из теоремы 16.3.1, а при $s\in(-1/2,0)$ — с использованием легко проверяемой сопряженности операторов $\mathcal{L}_D$ и $\widetilde{\mathcal{L}}_D$, $\mathcal{L}_N$ и $\widetilde{\mathcal{L}}_N$, отвечающих числам s и $-s$:

$$(\mathcal{L}_D u, v)_\Omega=(u,\widetilde{\mathcal{L}}_D v)_\Omega\quad(u\in\widetilde{H}^{1+s}(\Omega),\,v\in\widetilde{H}^{1-s}(\Omega)),$$

$$(\mathcal{L}_N u, v)_\Omega=(u,\widetilde{\mathcal{L}}_N v)_\Omega\quad(u\in H^{1+s}(\Omega),\,v\in H^{1-s}(\Omega)).$$

Липшицевость коэффициентов b_j нужна только при $s\in(-1/2,0)$. При $s\in(0,1/2)$ их можно предполагать ограниченными и измеримыми.

Отметим, что соответствие между f и решением u в теореме 16.3.3 является изоморфизмом.

Повторим, что если отказаться от предположений о сильной коэрцитивности, но оставить предположения о коэрцитивности, то однозначную разрешимость надо заменить фредгольмовостью с нулевым индексом; при этом размерности ядра и коядра не зависят от s. Сохраняется также соответствующее утверждение о гладкости решений.

Далее, результаты переносятся на задачи с неоднородными граничными условиями.

16.4. Следствия из теоремы Шнейберга и более общие результаты. В этом пункте мы снова предполагаем сильную коэрцитивность формы Φ_Ω на $\widetilde{H}^1(\Omega)$, если рассматриваем задачу Дирихле, и на $H^1(\Omega)$, если рассматриваем и задачу Неймана.

Из теоремы Шнейберга (см. п. 13.7) вытекает, что если предположения, сделанные в теоремах предыдущего пункта (о формальной самосопряженности старшей части и дополнительном условии (11.7.4) в случае задачи Неймана), не выполнены, то, по крайней мере, существует такое $\varepsilon\in(0,1/2]$, что задачи Дирихле и Неймана однозначно разрешимы при $|s|<\varepsilon$. Как в п. 11.7, это ε мы будем обозначать через $\varepsilon(L)$, считая его общим для задач Дирихле и Неймана, если есть сильная коэрцитивность на $H^1(\Omega)$. Если выполнены предположения из предыдущего пункта, то $\varepsilon(L)=1/2$.

В частности, этим закончено доказательство теоремы 11.7.3. Теперь мы продвинемся дальше.

Напомним, что обозначения пространств с индексами s, p введены в п. 16.1 и что $t=1/p$. Для $0<\varepsilon\leqslant 1/2$, $0<\delta\leqslant 1/2$ введем обозначение

$$Q_{\varepsilon,\delta} = \{(s,t)\colon |s| < \varepsilon,\ |t-1/2| < \delta\}. \tag{16.4.1}$$

Теорема 16.4.1. *Существует такое $\delta=\delta(L)>0$, что задача Дирихле с однородным граничным условием остается однозначно разрешимой при $(s,t)\in Q_{\varepsilon,\delta}$, $\varepsilon=\varepsilon(L)$. Такое же утверждение справедливо для задачи Неймана с однородным граничным условием.*

Поясним, как это получается для задачи Дирихле. Оператор $\mathcal{L}_D$ действует ограниченным образом из $\widetilde{H}^{1+s}(\Omega)$, $|s|<\varepsilon(L)$, в $H^{-1+s}(\Omega)$ и обратим. Фиксируя теперь s с $|s|<\varepsilon(L)$, рассмотрим $\mathcal{L}_D$ как оператор из $\widetilde{H}_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)$ в $H_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)$. Это интерполяционные шкалы, и оператор действует из пространств первой в пространства второй ограниченным образом. Нужное δ существует по теореме Шнейберга. Из его оценок, приведенных в п. 13.7, видно, что δ можно считать не зависящим от s.

Для задачи Неймана все аналогично с соответствующим изменением пространств. ☐

Замечание 16.4.2. *Эти результаты снова распространяются на задачи Дирихле и Неймана с неоднородными граничными условиями.*

В случае задачи Дирихле мы сводим неоднородное условие Дирихле $u^+=g$ с $g\in B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ к однородному, вычитая из искомого решения функцию u_0 из $H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)$ с заданным граничным значением. Несложно проследить, что при надлежащим образом определенной правой части в уравнении,

$$(f_0,v)_\Omega = \Phi_\Omega(u_0,v),$$

новая правая часть попадет в $H_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)$.

В случае задачи Неймана мы сводим неоднородное граничное условие Неймана к однородному, заменяя функционал $(h,v^+)_\Gamma$ над $B_{p'}^{1/2-s}(\Gamma)$ с $h\in B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$ функционалом $(f_1,v)_\Omega$ над $H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega)$ с $f_1\in\widetilde{H}_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)$.

Теорема 11.2.1 переносится на пространства $H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)$:

Теорема 16.4.3. *При условии существования и единственности решения задачи Дирихле в пространстве $H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)$ это пространство является прямой суммой подпространства $\widetilde{H}_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)$ функций с нулевыми граничными значениями и подпространства* *решений однородной системы $Lu = 0$ в Ω. Второе пространство параметризуется элементами пространства $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$.*

Соответствующее разложение $u = u_1 + u_2$ для элементов пространства $H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)$ снова будем называть *разложением Вейля* в этом пространстве, отвечающим оператору L. Пусть однозначно разрешима также задача Дирихле для формально сопряженной системы в пространстве $H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega)$. Запишем первое разложение для $u \in H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega)$ и второе, $v = v_1 + v_2$, для $v \in H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega)$ и оператора $\widetilde{L}$. Примем, что $Lu_2 = 0$ и $\widetilde{L}v_2 = 0$, т. е. что функционалы слева продолжены нулем соответственно на функции v_2 и u_2. Тогда получим обобщение формулы (11.2.3):

$$\Phi_\Omega(u, v) = (Lu_1, v_1)_\Omega + (T^+ u_2, v_2^+)_\Gamma. \tag{16.4.2}$$

Оно позволяет получить аналог формулы (11.2.4):

$$\widetilde{H}_p^{-1/2+s+1/p'}(\Omega) = \widetilde{H}_{p,1}^{-1/2+s+1/p'}(\Omega) \dotplus \widetilde{H}_{p,2}^{-1/2+s+1/p'}(\Omega). \tag{16.4.3}$$

Здесь первое подпространство справа получается продолжением функционалов из $H_p^{-1/2+s+1/p'}(\Omega)$ нулем на функции v_2. Оно изоморфно $H_p^{-1/2+s+1/p'}(\Omega)$, и эти функции не содержат слагаемых, сосредоточенных на Γ. Второе подпространство состоит из функционалов, сосредоточенных на Γ, оно изоморфно $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$.

Для решений задачи Дирихле получается двусторонняя априорная оценка, а для задачи Неймана она получается после редукции к задачам (11.2.5)—(11.2.6) при соответствующем условии однозначной разрешимости.

Если форма Φ_Ω сильно коэрцитивна на $\widetilde{H}^1(\Omega)$, то мы теперь имеем продолженный *ограниченный оператор Дирихле*

$$D\colon B_p^{1/2+s}(\Gamma) \to B_p^{-1/2+s}(\Gamma) \tag{16.4.4}$$

при указанных выше s и t, а если эта форма сильно коэрцитивна на $H^1(\Omega)$, то имеем также продолженный *ограниченный оператор Неймана*

$$N\colon B_p^{-1/2+s}(\Gamma) \to B_p^{1/2+s}(\Gamma), \tag{16.4.5}$$

причем это взаимно обратные операторы, если принять, что соответствующие этим двум задачам δ совпадают.

Операторы D_1 и N_1 (первоначально определенные в п. 11.4) теперь действуют следующим образом:

$$D_1 : \widetilde{B}_p^{1/2+s}(\Gamma_1) \to B_p^{-1/2+s}(\Gamma_1), \tag{16.4.6}$$

$$N_1 : \widetilde{B}_p^{-1/2+s}(\Gamma_1) \to B_p^{1/2+s}(\Gamma_1). \tag{16.4.7}$$

Здесь, как и раньше, они действуют на функции из своей области определения соответственно как D и N, а результат сужается на Γ_1. Из рассмотрений в § 14 видно, что они действуют в интерполяционных шкалах. В точке $(s,t) = (0, 1/2)$ они обратимы. Поэтому мы можем (повторно) применить теорему Шнейберга и заключаем, что они обратимы при $|s| < \varepsilon$, $|t - 1/2| < \delta$ с (новыми) ε и δ. При повторном применении теоремы Шнейберга эти числа, вообще говоря, уменьшаются, а утверждать, что $\varepsilon = 1/2$, в этом случае нет оснований. Аналогично определяются операторы N_2 и D_2, и для них получается такой же результат.

В смешанной задаче (11.4.1) теперь

$$u \in H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega), \quad g \in B_p^{1/2+s}(\Gamma_1), \quad h \in B_p^{-1/2+s}(\Gamma_2). \tag{16.4.8}$$

Пробные функции принадлежат $H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega; \Gamma_1)$ (в частности, равны нулю на Γ_1), а правые части f принадлежат сопряженному пространству $[H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega; \Gamma_1)]^*$ (относительно продолжения скалярного произведения в Ω).

Пусть снова форма Φ_Ω сильно коэрцитивна на $H^1(\Omega)$. Смешанная задача сводится к задаче Дирихле при помощи оператора D_2 и к задаче Неймана при помощи оператора N_1, как это сделано в п. 11.4. Получается

Теорема 16.4.4. *Смешанная задача однозначно разрешима при* $(s,t) \in Q_{\varepsilon,\delta}$ *с достаточно малыми* ε *и* δ.

Перейдем к операторам типа потенциала. Теперь предполагаем, что поверхность Γ лежит на торе $\mathbb{T}$ и разделяет его на области $\Omega^\pm$. Предполагаем сильную коэрцитивность формы $\Phi_{\mathbb{T}}$ на $H^1(\mathbb{T})$, а также, по мере надобности, сильную коэрцитивность соответствующих форм $\Phi_{\Omega^\pm}$ на $H^1(\Omega^\pm)$.

Сначала нужно получить общее утверждение об однозначной разрешимости уравнения на торе

$$Lu = f \quad (u \in H_p^{1+\sigma}(\mathbb{T}), \quad f \in H_p^{-1+\sigma}(\mathbb{T})). \tag{16.4.9}$$

Оператор L при сделанных предположениях о гладкости определен и ограничен при всех $p>1$ и $|\sigma|\leqslant 1$. В п. 12.1 мы доказали обратимость этого оператора при $p=2$ и $\sigma=1$. На $p=2$ и $\sigma=-1$ результат распространяется по двойственности. Отсюда следует обратимость при $p=2$ и $|\sigma|<1$ в силу соображений из теории интерполяции (см., в частности, теорему 13.7.1), чем заканчивается доказательство теоремы 12.1.1.

В [89] обратимость оператора L доказана другими средствами при $p>1$ и $0\leqslant\sigma<1$ в предположении, что коэффициенты принадлежат $C^1(\overline{\Omega})$.

Но для нас в принципе достаточно, опираясь на теорему 12.1.1, применить теорему Шнейберга:

Предложение 16.4.5. *Существует такое* $\delta>0$, *что уравнение* (16.4.9) *остается однозначно разрешимым при* $|\sigma|\leqslant 1$, $|t-1/2|<\delta$.

Проследим теперь за пространствами, в которых действуют интересующие нас операторы.

Как мы знаем, оператор γ перехода к следу действует ограниченным образом из $H_{p'}^{1/2-s+1/p'}(\Omega^\pm)$ в $B_{p'}^{1/2-s}(\Gamma)$. Поэтому сопряженный оператор γ^* действует ограниченным образом из $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$ в $H_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega^\pm)$. Здесь пока (s,t) — любая точка квадрата Q.

Следовательно, оператор $\mathcal{A}=L^{-1}\gamma^*$ действует ограниченным образом из $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$ в $H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega^\pm)$ для $(s,t)\in Q$. Как следствие для этих (s,t) оператор $A=\gamma\mathcal{A}$ ограничен из $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$ в $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$, а $T^\pm\mathcal{A}$ и $\widehat{B}$ — ограниченные операторы в $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$.

Так как у нас имеет место сильная коэрцитивность форм $\Phi_{\Omega^\pm}$ на $\widetilde{H}^1(\Omega^\pm)$, то оператор A обратим в точке $(s,t)=(0,1/2)$. Но он действует в интерполяционных шкалах. Применяя теорему Шнейберга, получаем, что он обратим при $(s,t)\in Q_{\varepsilon,\delta}$ с достаточно малыми ε и δ. Ниже выяснится, что $\varepsilon=1/2$ при предположениях п. 16.3.

Теперь мы обобщаем формулу (12.3.4) на $u\in H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega^\pm)$ для тех (s,t), для которых у нас есть однозначная разрешимость задачи Дирихле. Для этих (s,t) получается ограниченность оператора $\mathcal{B}$ из $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ в $H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega^\pm)$ и как следствие ограниченность операторов $\gamma^\pm\mathcal{B}$ и B в $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ и $H=-T^\pm\mathcal{B}$ из $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ в $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$.

Пусть мы имеем теперь сильную коэрцитивность форм $\Phi_{\Omega^\pm}$ на $H^1(\Omega^\pm)$. Тогда, стартуя от точки $(s,t)=(0,1/2)$ и снова применяя теорему Шнейберга, мы получаем утверждения об обратимости операторов H, $\frac{1}{2}I \pm B$ и $\frac{1}{2}I \pm \widehat{B}$ при $(s,t) \in Q_{\varepsilon,\delta}$ с достаточно малыми ε и δ. Ср. с п. 12.5. И здесь сейчас выяснится, что $\varepsilon = 1/2$ при предположениях п. 16.3.

Дело в том, что если в точке (s,t) однозначно разрешима задача Дирихле, то в ней справедливы, кроме формулы (12.3.4), соотношения скачков (12.3.10). Это позволяет вывести обратимость в этой точке оператора A с формулой $A^{-1} = D^+ + D^-$. Если же в этой точке однозначно разрешима и задача Неймана, то получается и обратимость оператора H с формулой $H^{-1} = N^+ + N^-$, а также обратимость операторов $\frac{1}{2}I \pm B$ и $\frac{1}{2}I \pm \widehat{B}$.

Обобщаются также все другие соотношения из § 12, включая формулы для проекторов Кальдерона (теперь они действуют в прямом произведении пространств $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ и $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$), формулы для решения задач Дирихле и Неймана, формулы связи между операторами.

Резюмируем эти результаты.

Теорема 16.4.6. *Пусть числа $\varepsilon = \varepsilon(L)$ и $\delta = \delta(L)$ таковы, что при $(s,t) \in Q_{\varepsilon,\delta}$ однозначно разрешима задача Дирихле. Тогда при $(s,t) \in Q_{\varepsilon,\delta}$ обратим оператор A, при этом $A^{-1} = D^+ + D^-$. Если при $(s,t) \in Q_{\varepsilon,\delta}$ однозначно разрешима и задача Неймана, то при этих (s,t) обратим также оператор H, при этом $H^{-1} = N^+ + N^-$. Кроме того, при этом справедливы и другие соотношения, выведенные в* § 12.

Ограниченность операторов (см. п. 12.8)

$$A_1 : \widetilde{B}_p^{-1/2+s}(\Gamma_1) \to B_p^{1/2+s}(\Gamma_1) \quad \text{и} \quad H_1 : \widetilde{B}_p^{1/2+s}(\Gamma_1) \to B_p^{-1/2+s}(\Gamma_1)$$

следует из ограниченности соответственно операторов A и H. После этого обратимость операторов A_1 и H_1, но уже только в окрестности центра квадрата Q, получается при помощи нового применения теоремы Шнейберга.

Отсюда, в свою очередь, вытекают обобщения результатов о задачах с условиями на незамкнутой поверхности Γ_1 из п. 12.8. Пространство $H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega_0)$ определяется как состоящее из функций, сужения которых на $\Omega^\pm$ принадлежат $H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega^\pm)$ и имеют нулевые скачки на Γ_2. В задаче Дирихле, например, $u^\pm = g^\pm \in B_p^{1/2+s}(\Gamma_1)$, $[u]_{\Gamma_1} \in \widetilde{B}_p^{1/2+s}(\Gamma_1)$.

Теорема 16.4.7. *Результаты п. 12.8 для операторов A_1, H_1, а также результаты для задач с условиями на незамкнутой поверхности сохраняются для точек некоторой окрестности центра квадрата Q.*

Предоставляем читателю самостоятельно обобщить результат об однозначной разрешимости для задач сопряжения из п. 12.10 на точки из окрестности центра квадрата Q.

В отношении спектральных задач можем добавить, что спектры не зависят от (s, t). При $p = 2$, если задаче отвечал самосопряженный оператор, промежуток для s расширяется с сохранением самосопряженности и базисности собственных функций. При $p \neq 2$ оператор рассматривается в банаховых пространствах. При этом сохраняются утверждения о полноте собственных и корневых функций благодаря справедливости оптимальной оценки резольвенты. См. работы [209] и [106] и ссылки на литературу в последней.

Во всех утверждениях в этом параграфе пространства H на торе и в $\Omega^{\pm}$ можно заменить пространствами B с теми же индексами.

16.5. Метод Ниренберга и регулярность решений внутри области. К материалу двух предыдущих пунктов мы добавим здесь краткое объяснение метода разностных отношений Л. Ниренберга [280] и при этом наметим доказательство следующей теоремы, которая в близкой формулировке содержится в этой работе.

Теорема 16.5.1. *Пусть u — решение задачи Дирихле для сильно эллиптической системы $Lu = f$ с липшицевыми в $\overline{\Omega}$ коэффициентами $a_{j,k}$ и b_j, принадлежащее $\widetilde{H}^1(\Omega)$, и пусть Ω' — внутренняя подобласть: $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Предположим, что $f \in L_2(\Omega)$. Тогда $u \in H^2(\Omega')$ и справедлива оценка*

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leqslant C_1 \big[\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \big]. \tag{16.5.1}$$

Формальная самосопряженность главной части системы здесь не нужна. Глобальная гладкость решения при правой части из $L_2(\Omega)$ в доказательстве теоремы Саваре намного меньше, и мы теперь видим, что это связано с поведением решения вблизи границы. Это существенное обстоятельство.

Основной инструмент в доказательстве — разностное отношение

$$w_h(x) = \frac{w(x+h) - w(x)}{h}. \tag{16.5.2}$$

Справа в знаменателе h — малое вещественное число, а в числителе — точка в $\mathbb{R}^n$, все координаты которой равны нулю, кроме координаты с номером i, которая равна числу h. Номер i фиксируется и для облегчения обозначений не указывается в них. Надо предположить, что $|h|$ меньше расстояния от внутренней точки x до границы. Удобно считать функции из $\widetilde{H}^1(\Omega)$ нулевыми вне Ω.

Сформулируем некоторые довольно очевидные свойства разностных отношений. Через $\widehat{\Omega}$ обозначаем любую внутреннюю подобласть в Ω.

Лемма 16.5.2. *Для функций v, w из $H^1(\Omega)$ с носителями в $\widehat{\Omega}$*

$$(\partial_k v)_h = \partial_k(v_h) \quad и \quad (v_h, w)_\Omega = -(v, w_{-h})_\Omega \tag{16.5.3}$$

при достаточно малом $|h|$.

Лемма 16.5.3. *Для функции v из $H^1(\Omega)$ при достаточно малом h*

$$\|v_h\|_{L_2(\widehat{\Omega})} \leqslant \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad и \quad \lim_{h\to 0}\|v_h - \partial_i v\|_{L_2(\widehat{\Omega})} = 0. \tag{16.5.4}$$

Здесь первое неравенство получается при помощи формулы Адамара (16.3.12).

Лемма 16.5.4. *Если для функции v из $\widetilde{H}^1(\Omega)$ мы имеем*

$$\|(\partial_k v)_h\|_{L_2(\widehat{\Omega})} \leqslant C_2, \tag{16.5.5}$$

где C_2 не зависит от h, то существует $\partial_i\partial_k v \in L_2(\widehat{\Omega})$ с нормой, не превосходящей C_2.

Здесь причина состоит в том, что ограниченное множество в $L_2(\widehat{\Omega})$ слабо компактно, поэтому можно выбрать стремящуюся к нулю последовательность значений h, по которой $(\partial_k v)_h$ сходятся ко второй производной от v в смысле обобщенных функций.

Перейдем к доказательству теоремы. Не ограничивая общности, предположим, что форма $\Phi_\Omega(u, v)$ содержит только старшие члены. Неравенство Гординга имеет вид

$$\|v\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)} \leqslant C_3 \operatorname{Re} \Phi_\Omega(v, v) + C_4\|v\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{16.5.6}$$

Для решения u и пробной функции $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ имеем

$$\Phi_\Omega(u, v) = (f, v)_\Omega, \tag{16.5.7}$$

поэтому справедлива ключевая для дальнейшего оценка

$$|\Phi_\Omega(u, v)| \leqslant \|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)}. \tag{16.5.8}$$

Зафиксируем промежуточные подобласти Ω'' и Ω''':

$$\overline{\Omega'} \subset \Omega'', \quad \overline{\Omega''} \subset \Omega''', \quad \overline{\Omega'''} \subset \Omega.$$

Пусть $\zeta(x)$ — функция из $C_0^\infty(\Omega)$, равная 1 в Ω'' и 0 вне Ω''', $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$. Положим $\zeta u = v$, и пусть $w \in \widetilde{H}^1(\Omega)$. Через K_j обозначаются постоянные, не зависящие от w и h.

Мы имеем, используя неравенство в (16.5.4) и формулу Адамара,

$$|\Phi_\Omega(v_h, w)| = \Big|\sum (a_{j,k}\partial_k(\zeta u)_h, \partial_j w)_\Omega\Big| \leqslant \\ \leqslant \Big|\sum (a_{j,k}(\zeta\partial_k u)_h, \partial_j w)_\Omega\Big| + K_1\|w\|_{H^1(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)}. \quad (16.5.9)$$

Первое слагаемое справа равно

$$\Big|\sum((a_{j,k}\zeta\partial_k u)_h - (a_{j,k})_h\zeta(x+h)\partial_k u(x+h), \partial_j w)_\Omega\Big|.$$

Используя лемму 16.5.2, получаем, что правая часть в (16.5.9) оценивается через

$$\Big|\sum (a_{j,k}\partial_k u, \zeta\partial_j w_{-h})_\Omega\Big| + K_2\|w\|_{H^1(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Поэтому

$$|\Phi_\Omega(v_h, w)| \leqslant \Big|\sum (a_{j,k}\partial_k u, \partial_j(\zeta w_{-h}))_\Omega\Big| + K_3\|w\|_{H^1(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)} = \\ = |\Phi_\Omega(u, \zeta w_{-h})| + K_3\|w\|_{H^1(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Теперь воспользуемся соотношением (16.5.8) с ζw_{-h} вместо v. Получим

$$|\Phi_\Omega(v_h, w)| \leqslant \|f\|_{L_2(\Omega)}\|\zeta w_{-h}\|_{L_2(\Omega)} + K_3\|w\|_{H^1(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Полагая $w = v_h$, получаем

$$|\Phi_\Omega(v_h, v_h)| \leqslant K_4\|v_h\|_{H^1(\Omega)}\big[\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\big],$$

что вместе с (16.5.6) дает

$$\|v_h\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant K_5\|v_h\|_{H^1(\Omega)}\big[\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\big] + C_4\|v_h\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Здесь последнее слагаемое оценивается с использованием неравенства в (16.5.4) через $\|v_h\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$. После сокращения на $\|v_h\|_{H^1(\Omega)}$ получаем

$$\|v_h\|_{H^1(\Omega)} \leqslant K_6\big[\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\big].$$

Теперь можно применить лемму 16.5.4, после чего легко приходим к цели.

Ниренберг доказывает также, что *если граница — класса C^2, то решение принадлежит* $H^2(\Omega)$. Для этого в окрестности граничной точки после ее выпрямления используется аналогичная аргументация в отношении касательных производных от производных решения 1-го порядка, а затем «чистая» вторая производная по нормали вычисляется через остальные производные из системы. Результат распространяется на случай неоднородного условия Дирихле с правой частью из $H^{3/2}(\Gamma)$.

Отсюда, в частности, следует, что *для сильно эллиптической системы в области с гладкой границей при правой части из* $L_2(\Omega)$ *вариационная постановка задачи Дирихле эквивалентна обычной постановке. Поэтому сильная эллиптичность системы влечет эллиптичность задачи Дирихле для нее.*

16.6. Примеры. Здесь мы рассмотрим примеры задач Дирихле с сильной коэрцитивностью, не разрешимых в пространствах, отвечающих значительной части точек квадрата Q. Для этого мы используем примеры, хорошо известные в теории задач в областях с угловыми и коническими точками [40, 90], [82].

Обозначим через Ω_0 пересечение сектора, определяемого в полярных координатах (r, ω) неравенствами $0 < \omega < \alpha$ $(\alpha < 2\pi)$, с единичным кругом. Через Ω обозначим область, получаемую из Ω_0 сглаживанием границы возле точек $(1, 0)$ и $(1, \alpha)$. В качестве Φ_Ω возьмем простейшую форму

$$\int\limits_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} + \tau u \bar{v})\, dx.$$

Известно и легко проверяется, что в указанном секторе скалярная функция

$$u(r, \omega) = r^{\pi/\alpha} \sin(\omega\pi/\alpha)$$

является решением однородной задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Следовательно, в Ω это решение задачи Дирихле

$$-\Delta u + \tau u = f, \quad u^+ = g,$$

где τ — сколь угодно большое положительное число, $f = \tau u$ и g — бесконечно гладкая функция на границе (равная нулю вблизи начала). Очевидно, что функция f непрерывна в $\overline{\Omega}$, она поэтому принадлежит всем пространствам $H_p^{-1/2+s-1/p'}(\Omega)$, а g принадлежит всем пространствам $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$, отвечающим точкам квадрата. С другой стороны, u — произведение положительно однородной функции r^h от (x_1, x_2) степени $h = \pi/\alpha$ на бесконечно гладкую функцию, отделенную от нуля при $0 < \varepsilon \leqslant \omega \leqslant \alpha - \varepsilon$ при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$. Число h больше $1/2$ и сколь угодно близко к $1/2$, если α брать близким к 2π. Запишем h в виде $h = 1/2 + \eta$, $\eta > 0$.

Производные 1-го порядка по x_1 или x_2 от u содержат слагаемое, в котором имеется однородный множитель степени $h-1 = -1/2+\eta$. Они принадлежат $L_p(\Omega)$ только при

$$\left(-\frac{1}{2}+\eta\right)p+1 > -1.$$

Поэтому u не принадлежит $H_p^1(\Omega)$, если это условие нарушено. Значит, если $p > 4$, то u не принадлежит $H_p^1(\Omega)$ при α, достаточно близком к 2π. Соответствующее s определяется из равенства для верхнего индекса наших пространств

$$\frac{1}{2}+s+\frac{1}{p} = 1,$$

оно заключено между $1/4$ и $1/2$. Мы указали точки (s, t) квадрата Q, в которых есть задачи Дирихле с сильной коэрцитивностью, не являющиеся однозначно разрешимыми.

Аналогичные примеры с задачей Неймана получаются, если заменить синус на косинус.

В этих примерах интересно также то, что наличие одной угловой точки на границе существенно снижает гладкость решений.

16.7. Дробные степени операторов, отвечающих задачам в липшицевых областях, и проблема Като. Вернемся к операторам из п. 11.10. Будем считать, что выполнены указанные там предположения о пространствах и операторах. Дополним их двумя предположениями, которые сформулируем немного ниже.

Области определения дробных степеней S_1^α самосопряженного оператора S_1, как мы видели в п. 13.9, при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ образуют шкалу для комплексного метода интерполяции между пространствами H_{-1} и H_1. Обозначим эти пространства через H_τ, $\tau = -1 + 2\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$. Поясним, что если $\{e_j\}_1^\infty$ — ортонормированный базис из собственных векторов оператора S_1 в H_{-1} и λ_j — соответствующие собственные значения, то H_τ состоит из векторов

$$u = \sum \lambda_j^\alpha \langle u, e_j\rangle_{-1} e_j \ \text{ с } \ \|u\|_\tau^2 = \sum_1^\infty \lambda_j^{2\alpha} |\langle u, e_j\rangle_{-1}|^2 < \infty. \tag{16.7.1}$$

Оператор S_1^α действует ограниченным и обратимым образом из H_{τ_1} в H_{τ_2} при $\tau_2 = \tau_1 - 2\alpha$.

Сделаем, во-первых, следующее естественное предположение: *при $\alpha = 1/2$ это пространство совпадает с H_0 и скалярное произведение совпадает с $(u, v)_0$:*

$$\sum_1^\infty \lambda_j \langle u, e_j\rangle \overline{\langle v, e_j\rangle} = (u, v)_0. \tag{16.7.2}$$

Пространства H_τ и $H_{-\tau}$ при $|\tau| \leqslant 1$ дуальны относительно его продолжения на их прямое произведение.

Эту шкалу можно, используя степени оператора S_1, продолжить за точки ± 1. В наших конкретных задачах эти пространства заданы априорно. В частности, оператор S_1 остается ограниченным и обратимым из $H_{1+\gamma}$ в $H_{-1+\gamma}$ при любом $\gamma \in \mathbb{R}$. Но мы договоримся пользоваться пространствами H_τ только при $\tau \in (-3/2, 3/2)$, чтобы сохранить обозначение H_2 для $D(A_2)$. В гладком случае в этих обозначениях нет противоречий и можно рассматривать H_τ при любых τ.

Мы предположим, во-вторых, что операторы A_1 и A_1^* остаются ограниченными из $H_{1+\gamma}$ в $H_{-1+\gamma}$ при $|\gamma| < \varepsilon$ с некоторым малым $\varepsilon > 0$.

Как мы видели в пп. 11.7 и 16.4, в наших конкретных задачах с этим нет проблем. Такая ограниченность обеспечивается предположением о небольшой гладкости коэффициентов.

Более того, по теореме Шнейберга (п. 13.7) *эти операторы обратимы* при $|\gamma| < \varepsilon_1$, где ε_1 — некоторое достаточно малое положительное число, $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon$. В наших конкретных задачах это теоремы о гладкости.

В этом пункте мы объясним путь к важным результатам для дробных степеней операторов A_1 и A_2. Начнем с оператора A_2.

Как мы уже отмечали, в общем случае нет информации о $H_2 = D(A_2)$. Однако Като установил [251, теорема 1.1], что

$$D(A_2^\alpha) = D(A_2^{*\alpha}) = D(S_2^\alpha) \ \text{ при } \ 0 \leqslant \alpha < 1/2. \tag{16.7.3}$$

Таких равенств, как отметил Като, в общем случае нет при $1/2 < \alpha < 1$. Возникла проблема: когда справедливы равенства

$$D(A_2^{1/2}) = D(A_2^{*1/2}) = H_1. \tag{16.7.4}$$

Она получила известность как *проблема Като* (Kato's square root problem) и вызвала поток содержательных исследований. Литературу мы подробнее укажем в § 18. В частности, для наших конкретных задач разными и не простыми способами было показано, что проблема решается положительно.

Наблюдения Като, проблема и полученные результаты чрезвычайно интересны, в частности, по той причине, что, повторяем, в общем случае область определения $D(A_2)$ неизвестна, а $D(A_2)$ и $D(A_2^*)$ определенно могут быть разными (например, в случае «гладкой» несамосопряженной задачи Неймана).

Заметим, что в силу теоремы 13.9.3 [335]

$$D(A_2^\alpha) = [H_0, D(A_2)]_\alpha, \quad D(A_2^{*\alpha}) = [H_0, D(A_2^*)]_\alpha \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1). \tag{16.7.5}$$

Но $D(A_2)$ и $D(A_2^*)$ в общем случае остаются не известными, так что решение проблемы Като непосредственно отсюда не следует.

Оператор S_2 является самосопряженным в H_0 ввиду (11.10.8) и совпадения S_2 с S_1 на $D(S_2)$. В этом случае проблема легко решается положительно: как показано у Като [253] и в [66, п. 5.5.1], если совпадают любые два из пространств (16.7.4), то автоматически совпадают все три.

Для гладких эллиптических задач пространства справа в (16.7.5) описаны в работе Гривара [242], см. также Сили [309], и из этого описания видно, что проблема в этом случае решается положительно.

Мы хотим теперь показать, что проблема Като решается положительно в принятой нами в этом пункте общности.

Теорема 16.7.1. *При наших предположениях для операторов A_2 и A_2^* справедливы равенства* (16.7.4).

Доказательство. Положим

$$B = S_1^{-1/2} A_1 S_1^{-1/2}. \tag{16.7.6}$$

Это при наших предположениях ограниченный обратимый оператор в H_γ при малых $|\gamma|$, и мы имеем *факторизацию оператора A_1*:

$$A_1 = S_1^{1/2} B S_1^{1/2}. \tag{16.7.7}$$

Замечание 16.7.2. Оператор B не произволен. Так как $S_1 = \frac{1}{2}[A_1 + A_1^*]$, то

$$A_1^* = 2S_1 - A_1 = 2S_1 - S_1^{1/2}BS_1^{1/2} = S_1^{1/2}(2I - B)S_1^{1/2}.$$

Отсюда $B^* = 2I - B$, т. е.

$$\frac{1}{2}[B + B^*] = I. \tag{16.7.8}$$

Теперь, как в [322], будем доказывать следующее утверждение.

Лемма 16.7.3. *Имеют место включения*

$$H_1 \subset D(A_2^{1/2}), \quad H_1 \subset D(A_2^{*1/2}). \tag{16.7.9}$$

Отсюда теорема 16.7.1 следует в силу результата из статьи Като [253, с. 243].

Пусть γ — малое положительное число. Тогда $D(A_2) \subset H_{1+\gamma}$, так как оператор A_1 взаимно однозначно и непрерывно отображает эти пространства на $H_0 \subset H_{-1+\gamma}$. Последнее включение является плотным, поэтому $D(A_2)$ плотно вложено в $H_{1+\gamma}$.

Для доказательства леммы 16.7.3 докажем следующую лемму.

Лемма 16.7.4. *Пространство $H_{1+\gamma}$ непрерывно вложено в пространство $D(A_2^{(1+\gamma)/2})$.*

Доказательство леммы 16.7.4. Зафиксируем u и v сначала в $D(A_2)$ и $D(A_2^*)$ соответственно. Положим $\delta = (1-\gamma)/2$. Тогда $\delta \in (0, 1/2)$.

Оператор $A_2^{*-\delta}$ непрерывен из H_0 в $D(A_2^{*\delta})$. Но в силу (16.7.3) с учетом теоремы Трибеля 13.9.2

$$D(A_2^{*\delta}) = D(S_2^{\delta}) = [H_0, D(S_2^{1/2})]_{2\delta} = [H_0, H_1]_{2\delta} = H_{2\delta}.$$

Поэтому $A_2^{*-\delta}$ — непрерывный оператор из H_0 в $H_{2\delta}$. А так как $2\delta - 1 = -\gamma$, то $S_1^{1/2}A_2^{*-\delta}$ — непрерывный оператор из H_0 в $H_{-\gamma}$:

$$\|S_1^{1/2}A_2^{*-\delta}v\|_{-\gamma} \leqslant C_1\|v\|_0 \tag{16.7.10}$$

даже для $v \in H_0$.

Кроме того, $BS_1^{1/2}$ — ограниченный оператор из $H_{1+\gamma}$ в H_γ:

$$\|BS_1^{1/2}u\|_\gamma \leqslant C_2\|u\|_{1+\gamma}. \tag{16.7.11}$$

Далее, мы имеем

$$A_2^{*(1+\gamma)/2}v = A_2^*A_2^{*-\delta}v = A_1^*A_2^{*-\delta}v.$$

Поэтому
$$(u, A_2^{*(1+\gamma)/2} v)_0 = (A_1 u, A_2^{*-\delta} v)_0,$$
или (см. (16.7.7))
$$(A_2^{(1+\gamma)/2} u, v)_0 = (BS_1^{1/2} u, S_1^{1/2} A_2^{*-\delta} v)_0.$$

Отсюда в силу обобщенного неравенства Шварца и неравенств (16.7.10), (16.7.11)
$$|(A_2^{(1+\gamma)/2} u, v)_0| \leqslant C_3 \|BS_1^{1/2} u\|_\gamma \|S_1^{1/2} A_2^{*-\delta} v\|_{-\gamma} \leqslant C_4 \|u\|_{1+\gamma} \|v\|_0.$$

Так как $D(A_2^*)$ плотно в H_0, то получаем, что
$$\|A_2^{(1+\gamma)/2} u\|_0 \leqslant C_4 \|u\|_{1+\gamma}.$$
Это неравенство предельным переходом распространяется на $u \in \in H_{1+\gamma}$. □

Доказательство леммы 16.7.3. Мы имеем теперь, используя первое равенство в (16.7.5) и теорему 13.6.1 о реитерации,
$$H_1 = [H_0, H_{1+\gamma}]_{1/(1+\gamma)} \subset [H_0, D(A_2^{(1+\gamma)/2})]_{1/(1+\gamma)} = D(A_2^{1/2}).$$

Аналогично получаем, что
$$H_1 \subset D(A_2^{*1/2}).$$

Этим лемма 16.7.3 и теорема 16.7.1 доказаны. □ □

Перейдем к оператору A_1.

Теорема 16.7.5. *При наших предположениях чисто мнимые степени оператора A_1 локально ограничены. При $0 < \alpha < 1$*
$$D(A_1^\alpha) = [H_{-1}, H_1]_\alpha. \qquad (16.7.12)$$

Этот весьма содержательный результат следует из его эквивалентности результату теоремы 16.7.1, которая объяснена в [66, пп. 5.2.2 и 4.4.10].

Впрочем, объяснить ее несложно. Если $D(A_2^{1/2}) = H_1$, то
$$D(A_1^{1/2}) = A_1^{-1/2} H_{-1} = A_1^{1/2} A_1^{-1} H_{-1} = A_1^{1/2} H_1 =$$
$$= A_1^{1/2} A_2^{-1/2} A_2^{1/2} H_1 = A_1^{1/2} A_2^{-1/2} H_0 = H_0.$$
Получилась формула (16.7.13) при $\alpha = 1/2$. На остальные α она распространяется при помощи теоремы 16.6.8 из [78]. Эта теорема показывает, что справедливость формулы (16.7.13) в общем случае следует из ее справедливости для одного значения α. (Хаасе указывает, что по существу теорема принадлежит Коматсу.)

Объяснение обратной импликации (из (16.7.13) с $\alpha = 1/2$ следует, что $D(A_2^{1/2}) = H_1$) у Арендта тоже совсем короткое. Воспроизведем его:

$$D(A_2^{1/2}) = A_2^{-1/2} H_0 = A_2^{-1/2} A_1^{-1/2} H_{-1} = H_1.$$

В силу этой эквивалентности равенства (16.7.4) эквивалентны равенствам

$$D(A_1^{1/2}) = D(A_1^{*1/2}) = H_0, \tag{16.7.13}$$

а результат Сили в [308], упомянутый в п. 13.9, — это еще один подход к положительному решению проблемы Като для гладких задач.

Мы предоставляем читателю конкретизацию этих результатов в случаях задач Дирихле, Неймана и смешанной задачи для сильно эллиптических систем 2-го порядка в липшицевых областях. Он применим также к задачам Дирихле и Неймана для систем высших порядков.

Можно еще добавить, что оператор A_1 всегда является генератором непрерывной аналитической экспоненциально устойчивой полугруппы.

Добавим также, что интерполяционные шкалы $\{H_{-1+2\alpha}\}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, и $\{[H_0, D(A_2)]_{1-\theta}\}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, «склеиваются» в одну шкалу по теореме Вольфа 13.8.4 благодаря положительному решению проблемы Като (так как имеет место совпадение этих шкал на пространствах H_0 и H_1). Поэтому операторы A_1 и A_2 оказываются «согласованными» в пространствах между H_{-1} и $D(A_2)$. Любой результат о гладкости для решений уравнения $A_1 u = f$ дает некоторую информацию о $D(A_2)$. См. п. 16.2—16.4. И наоборот, любая информация о $D(A_2)$ может содержать результат о гладкости для решений уравнения $A_1 u = f$.

Отметим теперь следующее важное обстоятельство.

Замечание 16.7.6. *Полученные результаты — теоремы* 16.7.1 *и* 16.7.5 — *приложимы также к операторам на липшицевой границе* Γ, а именно, к оператору Дирихле D, к оператору A^{-1} (где $A\psi$ — сужение на границу потенциала простого слоя $\mathcal{A}\psi$) и к гиперсингулярному оператору H (см. §§ 11 и 12).

Во всех этих случаях $H_1 = H^{1/2}(\Gamma)$, $H_0 = H^0(\Gamma)$ и $H_{-1} = H^{-1/2}(\Gamma)$. В «гладких» задачах $H_2 = H^1(\Gamma)$.

Хотя соболевские пространства $H^t(\Gamma)$ определены на липшицевой поверхности только при $|t| \leqslant 1$, их шкалу можно продолжить за точки ± 1, используя степени соответствующего оператора S_1.

В частности, формула (16.7.13) справедлива для оператора Дирихле $D = A_1$ как оператора из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$. В гладких задачах областью определения $D(A_2)$ соответствующего оператора A_2 приходится считать $H^1(\Gamma)$ (а не $H^{3/2}(\Gamma)$). В общих негладких задачах она остается неизвестной, хотя некоторая информация о ней получается из теорем п. 16.4. В частности, это $H^1(\Gamma)$ в случае скалярного оператора L с самосопряженной главной частью (см. теорему 16.2.2). Но граничное условие Дирихле при этом приходится понимать в более общем смысле, чем у нас, — в смысле некасательной сходимости. См. в § 18 замечания к § 16, п. 5.

Во всех случаях граничных операторов первичны не форма, а оператор, по которому определяется форма:

$$\Phi(u, v) = (A_1 u, v)_0.$$

Эти результаты можно перенести на оператор Дирихле для систем высших порядков, а также на рассмотренные нами в §§ 11—12 операторы на части липшицевой границы с липшицевым краем. Можно охватить и фредгольмовы ситуации.

§ 17. Дополнение. Некоторые све́дения из теории операторов

В пп. 17.1—17.3 для удобства читателей собраны некоторые определения и теоремы из теории линейных операторов, которые нужны в предыдущих параграфах. Материал пп. 17.1—17.2 используется при построении теории эллиптических операторов, материал п. 17.3 — при рассмотрении спектральных задач для них. Пункт 17.4 — краткий обзор теории псевдодифференциальных операторов.

17.1. Фредгольмовы операторы. Напомним на всякий случай, что ограниченный оператор из одного банахова пространства в другое называется *компактным*, или *вполне непрерывным*, если он любое ограниченное множество переводит в предкомпактное множество, т. е. такое, в котором любая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Оператор называется *конечномерным*, если он имеет конечномерную область значений. Любой конечномерный оператор компактен.

Пусть X и Y — бесконечномерные банаховы пространства и A — линейный ограниченный оператор из X в Y. Он называется *фредгольмовым*, если имеет конечномерное ядро, замкнутую область значений и конечномерное коядро.

Ядром $\operatorname{Ker} A$ называется подпространство в X решений однородного уравнения $Au = 0$, а *коядром* $\operatorname{Coker} A$ — фактор-пространство $Y/R(A)$, где $R(A)$ — (замкнутая) область значений оператора A. Размерность коядра называют также коразмерностью области значений.

Напомним (ср. с п. 13.4), что подпространство Z_1 в банаховом пространстве Z называется *дополняемым*, если для него есть прямое дополнение — такое подпространство Z_2, что Z есть прямая сумма $Z_1 \dotplus Z_2$. Дополняемость подпространства Z_1 равносильна существованию ограниченного проектора P пространства Z на Z_1, $P^2 = P$, при этом $Z_2 = (I - P)Z$. Оператор P зависит от выбора Z_2 и называется проектором на Z_1 параллельно Z_2.

Предложение 17.1.1. 1. *Конечномерное подпространство Z_1 в банаховом пространстве Z всегда дополняемо.*

2. *Если Z_2 — такое подпространство в Z, что фактор-пространство Z/Z_2 конечномерно, то Z_2 дополняемо.*

Доказательство содержится, например, в [46, п. 4.21]. Наметим его.

1. Пусть Z_1 конечномерно и $z_1, \ldots, z_m$ — базис в этом подпространстве. Тогда любой вектор z из Z_1 однозначно записывается в виде

$$z = \alpha_1(z)z_1 + \ldots + \alpha_m(z)z_m.$$

Можно проверить, что $\alpha_j(z)$ — линейные непрерывные функционалы на Z_1 (норма в Z_1 берется из Z). По теореме Хана—Банаха (см., например, [32, гл. IV, §1]), их можно продолжить до линейных непрерывных функционалов на Z. Для продолженных функционалов сохраним обозначения $\alpha_j(z)$. Теперь положим уже для $z \in Z$

$$Pz = \alpha_1(z)z_1 + \ldots + \alpha_m(z)z_m.$$

Легко понять, что это проектор пространства Z на Z_1. Здесь Z_2 — это пересечение подпространств, на которых $\alpha_j(z) = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$.

2. (Обозначения здесь вводятся заново.) Пусть π — каноническое отображение $Z \to Z/Z_2$ и $e_1, \ldots, e_m$ — базис в фактор-пространстве. Выберем прообразы z_j для e_j: $\pi z_j = e_j$. Пусть Z_1 — подпространство в Z, натянутое на $z_1, \ldots, z_m$. Можно проверить, что тогда Z — прямая сумма подпространств Z_1 и Z_2. □

В силу этого предложения, если $A\colon X \to Y$ — фредгольмов оператор, то $\operatorname{Ker} A$ имеет прямое дополнение в X и $R(A)$ имеет прямое дополнение в Y. Выбрав и зафиксировав прямые дополнения к $\operatorname{Ker} A$ и $R(A)$, обозначим их соответственно через X_1 и Y_1. Размерность подпространства Y_1 равна коразмерности области значений. Нам будет удобно Y_1 называть *коядром* оператора A: $Y_1 = \operatorname{Coker} A$.

Если X и Y — (сепарабельные) гильбертовы пространства, то удобно пользоваться ортогональными дополнениями.

Фредгольмовость оператора следует воспринимать как его «почти обратимость».

Предложение 17.1.2. *Фредгольмов оператор A устанавливает непрерывный в обе стороны изоморфизм между прямым дополнением X_1 к его ядру в X и его областью значений $R(A)$ в Y.*

Доказательство. Очевидно, что отображение $A: X_1 \to R(A)$ взаимно однозначно и непрерывно. Обратный оператор непрерывен по теореме Банаха об обратном операторе (см., например, [32, гл. III, § 5]). □

Индексом $\varkappa(A)$ фредгольмова оператора A называется разность между размерностью ядра этого оператора и размерностью его коядра:

$$\varkappa(A) = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A. \tag{17.1.1}$$

Приведем определение параметрикса для оператора A. Ограниченный оператор B из Y в X называется *левым параметриксом* для ограниченного оператора A из X в Y, если

$$BA = I_1 + T_1, \tag{17.1.2}$$

где I_1 и T_1 — соответственно единичный и компактный операторы в X; *правым параметриксом*, если

$$AB = I_2 + T_2, \tag{17.1.3}$$

где I_2 и T_2 — соответственно единичный и компактный операторы в Y; *параметриксом*, или *двусторонним параметриксом*, если это и левый, и правый параметриксы. Обозначения в (17.1.2) и (17.1.3) будут использоваться и дальше.

Из этого определения следует, что если B — параметрикс для A, то A — параметрикс для B.

В литературе до появления термина «параметрикс» использовался также термин *регуляризатор*. Параметрикс, или регуляризатор, если он есть, — это в известной степени удовлетворительная замена обратного оператора, когда он не существует.

Предложение 17.1.3. *Из наличия левого параметрикса для оператора A следует конечномерность ядра этого оператора, а из наличия правого параметрикса — замкнутость его области значений и конечномерность коядра.*

Следовательно, из наличия параметрикса B для оператора A следует фредгольмовость этого оператора. Кроме того, тогда и B — фредгольмов оператор.

Доказательство. Мы считаем известным, что сумма $I + T$ единичного и компактного операторов в банаховом пространстве — фредгольмов оператор с нулевым индексом. См., например, [32, гл. VI, § 2][1]. Поэтому достаточно заметить, что при наличии левого параметрикса B

$$\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker}(BA) = \operatorname{Ker}(I_1 + T_1),$$

а при наличии правого параметрикса B

$$R(A) \supset R(AB) = R(I_2 + T_2), \quad Y = R(I_2 + T_2) \dotplus Q,$$

где Q — некоторое конечномерное подпространство в Y, поэтому

$$Y = R(A) \dotplus Y_1,$$

где Y_1 — (конечномерное) подпространство в Q.

Последнее утверждение в формулировке — следствие того, что A служит для B параметриксом. □

Предложение 17.1.4. *Если для A есть левый параметрикс B_1 и правый параметрикс B_2, то они оба являются двусторонними параметриксами.*

Доказательство. В силу равенства

$$B_1 A B_2 = (I + T_1) B_2 = B_1 (I_2 + T_2)$$

разность $B_1 - B_2$ левого и правого параметриксов оказывается компактным оператором, так как произведение компактного оператора на ограниченный оператор (в любом порядке) есть компактный оператор. Остается учесть, что сумма левого или правого параметрикса для A с компактным оператором тоже является соответственно левым или правым параметриксом для A. Это легко проверяется. □

Предложение 17.1.5. *Фредгольмов оператор A имеет двусторонний параметрикс B, притом такой, что $BA - I_1$ и $AB - I_2$ — конечномерные операторы.*

Доказательство. Оператор $A\colon X_1 \to R(A)$ имеет обратный оператор B_1. Продолжим его на Y_1 нулем и распространим полученный оператор на все Y по линейности. Проверим, что полученный оператор B есть двусторонний параметрикс для A.

---

[1] Добавим, что ядро и коядро у $I + T$ тривиальны, т. е. практически отсутствуют, если -1 не является собственным значением компактного оператора T. Известно, что ненулевые собственные значения компактного оператора изолированы и имеют конечную кратность. См. п. 17.3.

Пусть P — проектор в X на $\operatorname{Ker} A$ параллельно X_1 и Q — проектор в Y на Y_1 параллельно $R(A)$. Тогда

$$BA = BA(P + I_1 - P) = BA(I_1 - P) = B_1 A(I_1 - P) = I_1 - P,$$
$$AB = AB(Q + I_2 - Q) = AB(I_2 - Q) = AB_1(I_2 - Q) = I_2 - Q.$$

Операторы P и Q конечномерны и потому компактны. □

Предположим теперь дополнительно, что пространство X непрерывно вложено в некоторое банахово пространство X_0.

Предложение 17.1.6. *Пусть оператор A из X в Y фредгольмов. Тогда справедлива априорная оценка*

$$\|x\|_X \leqslant C(\|Ax\|_Y + \|x\|_{X_0}), \quad x \in X, \tag{17.1.4}$$

с постоянной, не зависящей от x. Если ядро $\operatorname{Ker} A$ *тривиально, то второе слагаемое в скобках можно опустить.*

Доказательство. На прямом дополнении X_1 к ядру мы имеем оценку (17.1.4) без второго слагаемого в скобках ввиду обратимости оператора $A\colon X_1 \to R(A)$. Если ядро $\operatorname{Ker} A$ нетривиально, то оно изоморфно себе в X_0 и на нем $\|x\|_X \leqslant C_1 \|x\|_{X_0}$. Произвольный элемент $x \in X$ запишем в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 = Px$ — проекция вектора x на $\operatorname{Ker} A$ и $x_2 = (I - P)x$ — его проекция на X_1. Имеем

$$\|x\|_X \leqslant \|x_1\|_X + \|x_2\|_X.$$

Здесь

$$\|x_1\|_X \leqslant C_1 \|x_1\|_{X_0} \leqslant C_1(\|x\|_{X_0} + \|x_2\|_{X_0}).$$

Далее, $\|x_2\|_{X_0} \leqslant C_2 \|x_2\|_X$ ввиду непрерывности вложения X в X_0, и

$$\|x_2\|_X = \|x_2\|_{X_1} \leqslant C_3 \|Ax_2\|_{R(A)} = C_3 \|Ax_2\|_Y = C_3 \|Ax\|_Y. \qquad \square$$

Предложение 17.1.7. *Пусть вложение X в X_0 компактно, и пусть для ограниченного оператора A верна оценка* (17.1.4). *Тогда он имеет конечномерное ядро и замкнутую область значений.*

Доказательство. 1. Проверим конечномерность ядра. Из этой оценки следует, что на ядре

$$\|x\|_X \leqslant C \|x\|_{X_0}. \tag{17.1.5}$$

Ядро $\operatorname{Ker} A$ всякого ограниченного оператора замкнуто. Из (17.1.5) видна замкнутость ядра в X_0. Возьмем в $\operatorname{Ker} A$ как подпространстве в X_0 любое ограниченное множество. В силу (17.1.5) оно ограничено в X и, значит, компактно в X_0. Итак, в $\operatorname{Ker} A$ любое ограниченное множество компактно. Отсюда следует, что $\operatorname{Ker} A$ конечномерно (см., например, [32, гл. V, § 2, теорема 4]).

2. Проверим замкнутость области значений. Сначала покажем, что на X_1 имеет место оценка

$$\|x\|_X \leqslant C_1 \|Ax\|_Y. \tag{17.1.6}$$

Допустим, что это неверно. Тогда есть такая последовательность $\{x_k\}$ в X_1, что $\|x_k\|_X \to \infty$ и нормы $\|Ax_k\|_Y$ ограничены. Положим $\widetilde{x}_k = x_k/\|x_k\|_X$. Тогда $\|\widetilde{x}_k\|_X = 1$ и $y_k = A\widetilde{x}_k \to 0$ в Y. Из $\{\widetilde{x}_k\}$ можно выбрать сходящуюся в X_0 подпоследовательность. Пусть уже $\{\widetilde{x}_k\}$ сходится в X_0. Тогда в силу (17.1.4) $\{\widetilde{x}_k\}$ сходится к некоторому пределу x_0 в X_1 и $\|x_0\|_X = 1$. С другой стороны, $A\widetilde{x}_k$ сходится в Y к нулю. Поэтому $x_0 \in \operatorname{Ker} A$. Получилось противоречие.

Используя (17.1.6) на X_1, проверим замкнутость области значений. Пусть $y_k = Ax_k \to y_0$ в Y. Можем считать, что $x_k \in X_1$, и в силу (17.1.6) $\{x_k\}$ сходится. Если предел есть x_0, то $Ax_0 = y_0$. □

Замечание. Если на X верна оценка (17.1.6), то ядро тривиально и область значений замкнута без предположения о компактности вложения X в какое-либо пространство.

Это утверждение читатель легко проверит самостоятельно.

Пусть теперь X и Y — бесконечномерные банаховы пространства, для простоты рефлексивные, и A — ограниченный оператор из X в Y. Пусть X^* — сопряженное к X пространство относительно некоторой формы $(x, g)_1$, т. е. эта форма — общий вид линейного непрерывного функционала над X; здесь g пробегает X^*. Для удобства мы считаем эту форму полуторалинейной, а не билинейной, как и аналогичную форму с индексом 2 ниже.

Далее, пусть Y^* — пространство, сопряженное к Y относительно формы $(y, f)_2$. Как известно, X^* и Y^* — банаховы пространства и формула

$$(Ax, f)_2 = (x, A^* f)_1 \tag{17.1.7}$$

однозначно определяет оператор A^*, действующий ограниченным образом из Y^* в X^*; он называется *оператором, сопряженным к A в смысле теории операторов в банаховых пространствах*.

Предложение 17.1.8. 1. *Оператор A^* фредгольмов вместе с A.*

2. *При этом уравнение $Ax = y$ разрешимо тогда и только тогда, когда $(y, f)_2 = 0$ для всех $f \in \operatorname{Ker} A^*$. Аналогично, уравнение $A^* f = g$ разрешимо тогда и только тогда, когда $(x, g)_1 = 0$ для всех $x \in \operatorname{Ker} A$.*

3. *При этом*

$$\dim \operatorname{Coker} A = \dim \operatorname{Ker} A^*, \quad \dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A^* \tag{17.1.8}$$

и

$$\varkappa(A^*) = -\varkappa(A), \tag{17.1.9}$$

а определение индекса (17.1.1) *равносильно такому*:

$$\varkappa(A) = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Ker} A^*. \tag{17.1.10}$$

Доказательство. 1. Если B — параметрикс для A, то, как нетрудно проверить, B^* — параметрикс для A^*. Это следует из соотношений $(BA)^* = A^* B^*$, $(AB)^* = B^* A^*$ и компактности оператора, сопряженного к компактному оператору ([32, гл. VI, § 1, теорема 4]).

2. Из (17.1.7) видно, что равенство $(Ax, f)_2 = 0$ для всех x эквивалентно равенству $(x, A^* f)_1 = 0$ для всех x, т. е. равенству $A^* f = 0$. В [17, т. I, гл. VI, лемма 2.8] проверено, что если $(y, f)_2 = 0$ для всех f из ядра оператора A^*, то y принадлежит замыканию области значений оператора A. Но у нас она замкнута.

3. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — базис в $\operatorname{Coker} A$; тогда базис в пространстве функционалов $f \in \operatorname{Ker} A^*$ образуют функционалы $f_1, \ldots, f_m$ с $(e_j, f_k) = \delta_{j,k}$ (равные 0 на $R(A)$). Это дает первую из формул (17.1.8). Вторая получается аналогично. □

Замечание 17.1.9. В частности, этот результат относится к случаю, когда A — ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H и сопряженное пространство с ним отождествлено. Если (x, y) — скалярное произведение в H, то сопряженный к A оператор A^* связан с A равенством

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \tag{17.1.11}$$

и называется *гильбертовым сопряженным* к A оператором. Это важнейшее и общеизвестное понятие в спектральной теории операторов (см. следующий пункт). Оно удобно, в частности, при изучении так называемых сингулярных интегральных эллиптических операторов на замкнутом многообразии M (см. ниже п. 17.4): они имеют нулевой порядок в шкале пространств $H^s(M)$, и их можно рассматривать как ограниченные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $H^0(M) = L_2(M)$.

Далее, формула (17.1.10) полезна в случае, когда A и A^* — компактные операторы в H, фактически действующие из H в некоторое компактно вложенное в H пространство. Так обстоит дело в случае псевдодифференциальных эллиптических операторов отрицательного порядка на замкнутом многообразии M. Если же A и A^* — эллиптические операторы в частных производных порядка $m > 0$ на M, то их можно рассматривать как неограниченные операторы в $H^0(M)$ с областью определения $H^m(M)$, тогда A и A^* — сопряженные операторы в $H^0(M)$ в смысле теории неограниченных операторов в гильбертовом пространстве.

Но важен также случай, когда A и A^* — неограниченные операторы в гильбертовом пространстве H с разными областями определения, компактно вложенными в H, и они фредгольмовы как ограниченные операторы из этих областей определения в H. При этом на элементах из этих областей определения имеет место формула (17.1.11). Тогда снова H — ортогональная сумма области значений оператора A и ядра оператора A^*, а также области значений оператора A^* и ядра оператора A. Снова эти операторы имеют противоположные индексы. Такую ситуацию мы имели в п. 7.3.

Во всех случаях, упомянутых в этом замечании, можно говорить о *сопряженности в смысле теории операторов в гильбертовом пространстве*.

Предложение 17.1.10. *Пусть A_1 — фредгольмов оператор из X в Y и A_2 — фредгольмов оператор из Y в Z. Тогда A_2A_1 — фредгольмов оператор из X в Z и*

$$\varkappa(A_2A_1) = \varkappa(A_1) + \varkappa(A_2). \tag{17.1.12}$$

Доказательство. Легко проверяется, что если B_1 и B_2 — параметриксы для A_1 и A_2, то B_1B_2 — параметрикс для A_2A_1. Докажем равенство (17.1.12).

Представим пространство Y в виде прямой суммы следующих четырех подпространств. Это возможно ввиду конечномерности ядер и коядер.

1) Пространство $R(A_1) \cap A_2^{-1}R(A_2)$.

2) $Y_1 = R(A_1) \cap \operatorname{Ker} A_2$.

3) $Y_2 = \operatorname{Ker} A_2 \cap \operatorname{Coker} A_1$.

4) $Y_3 = A_2^{-1}R(A_2) \cap \operatorname{Coker} A_1$.

Подпространства Y_1, Y_2, Y_3 конечномерны; обозначим их размерности через d_1, d_2, d_3.

Ядро оператора A_2A_1 — прямая сумма подпространств $\operatorname{Ker} A_1$ и $A_1^{-1}Y_1$. Его размерность равна $\dim\operatorname{Ker} A_1 + d_1$.

Далее, $\operatorname{Coker}(A_2A_1)$ — прямая сумма подпространств $\operatorname{Coker} A_2$ и A_2Y_3. Его размерность равна $\dim\operatorname{Coker} A_2 + d_3$.

Кроме того, $\dim\operatorname{Ker} A_2 = d_1 + d_2$ и $\dim\operatorname{Coker} A_1 = d_2 + d_3$.

Поэтому индекс $\varkappa(A_2A_1)$ равен

$$\begin{aligned}&\dim\operatorname{Ker} A_1 + d_1 + d_2 - (\dim\operatorname{Coker} A_2 + d_2 + d_3) = \\ &\qquad = \dim\operatorname{Ker} A_1 + \dim\operatorname{Ker} A_2 - (\dim\operatorname{Coker} A_2 + \dim\operatorname{Coker} A_1) = \\ &\qquad\qquad = \varkappa(A_1) + \varkappa(A_2). \quad \square\end{aligned}$$

Следствие 17.1.11. *Если B — параметрикс для A, то $\varkappa(B) = -\varkappa(A)$.*

Действительно, произведение этих операторов имеет нулевой индекс.

Предложение 17.1.12. 1. *При прибавлении к фредгольмову оператору компактного оператора получается фредгольмов оператор с тем же индексом.*

2. *Пусть A — фредгольмов оператор из X в Y. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что если A_1 — ограниченный оператор из X в Y с нормой меньше ε, то $A + A_1$ — фредгольмов оператор с тем же индексом.*

3. *Пусть A_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — семейство фредгольмовых операторов, непрерывно зависящих от t по операторной норме. Тогда индекс $\varkappa(A_t)$ не зависит от t.*

Доказательство. 1. Пусть A — фредгольмов оператор и A_1 — компактный оператор из X в Y, а B — параметрикс для A. Легко проверить, что тогда B — параметрикс для $A + A_1$, так что это тоже фредгольмов оператор. При этом

$$\varkappa(A + A_1) = -\varkappa(B) = \varkappa(A).$$

2. Пусть A — фредгольмов оператор и A_1 — ограниченный оператор из X в Y. Пусть B — параметрикс для A. Тогда $B(A + A_1) = I_1 + T + BA_1$. Здесь T — компактный оператор и BA_1 — ограниченный оператор с нормой $\|BA_1\| \leqslant \|B\|\|A_1\|$. Если это произведение меньше 1, то оператор $I_1 + BA_1$ обратим и $(I_1 + BA_1)^{-1}B$ — левый параметрикс для $A + A_1$. При этом же условии $B(I_2 + A_1B)^{-1}$ — правый параметрикс для $A + A_1$. Поскольку индекс параметрикса не меняется при его умножении на обратимый оператор, A и $A + A_1$ имеют одинаковые индексы.

3. Это утверждение следует из утверждения 2. $\square$

Свойство 3 индекса называют его *гомотопической инвариантностью.*

Предложение 17.1.13. *Пусть A — фредгольмов оператор. Тогда его можно представить в виде $A_0 + T$, где T — конечномерный оператор и*

1) *если $\varkappa(A) = 0$, то A_0 — обратимый оператор*;

2) *если $\varkappa(A) > 0$, то $R(A_0) = Y$ и* $\dim \operatorname{Ker} A_0 = \varkappa(A)$;

3) *если $\varkappa(A) < 0$, то* $\dim \operatorname{Ker} A_0 = \{0\}$ *и* $\dim \operatorname{Coker} A_0 = -\varkappa(A)$.

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — базис в $\operatorname{Ker} A$ и $y_1, \ldots, y_n$ — базис в $\operatorname{Coker} A$. Построим оператор F, равный нулю на X_1, полагая $Fx_j = y_j$ для всех j в первом случае, для $j \leqslant n$ и $Fx_j = 0$ для остальных j во втором, для $j \leqslant m$ в третьем и $A_0 = A + F$, $T = -F$ во всех трех случаях. Это приводит к цели. □

17.2. Теорема Лакса—Мильграма. Результаты, которые мы приведем в этом пункте, играют важную роль в теории сильно эллиптических уравнений. Теорема 17.2.2 появилась в [259], но в меньшей общности (близкие соображения содержатся в написанной раньше работе [126]); мы излагаем эту работу, следуя [91].

17.2a. Пусть H_1 — гильбертово пространство со скалярным произведением $(u, v)_1$. По теореме Ф. Рисса о линейных непрерывных функционалах над H_1 это общий вид непрерывного антилинейного функционала $F(v)$ над H_1, при этом u однозначно определяется по F. Мы будем говорить не о линейных, а об антилинейных функционалах, чтобы приготовить здесь формулировку, удобную для приложений. Соответствующую норму обозначим через $\|u\|_1$.

Пусть $\Phi(u, v)$ — полуторалинейная форма над H_1. Предположим ее непрерывной:

$$|\Phi(u, v)| \leqslant \alpha \|u\|_1 \|v\|_1, \tag{17.2.1}$$

α — положительная постоянная. При фиксированном u эта форма — непрерывный антилинейный функционал на H_1. Предположим, что выполнено неравенство

$$\|u\|_1^2 \leqslant \beta |\Phi(u, u)| \tag{17.2.2}$$

с положительной постоянной β.

Теорема 17.2.1. *При условиях* (17.2.1) *и* (17.2.2) *любой непрерывный антилинейный функционал $F(v)$ на H_1 допускает запись в виде $\Phi(u, v)$ с однозначно определенным $u \in H_1$.*

Доказательство. Определим линейное отображение $Zu = w$ пространства H_1 в себя равенством

$$\Phi(u, v) = (w, v)_1 \quad (v \in H_1). \tag{17.2.3}$$

Это отображение является непрерывным:

$$\|Zu\|_1 = \sup_{v \neq 0} \frac{|(Zu, v)_1|}{\|v\|_1} = \sup_{v \neq 0} \frac{|\Phi(u, v)|}{\|v\|_1} \leqslant \alpha \|u\|_1,$$

так что

$$\|Zu\|_1 \leqslant \alpha \|u\|_1. \tag{17.2.4}$$

Далее,

$$\|u\|_1^2 \leqslant \beta |\Phi(u, u)| = \beta |(w, u)_1| \leqslant \beta \|w\|_1 \|u\|_1,$$

так что

$$\|u\|_1 \leqslant \beta \|w\|_1. \tag{17.2.5}$$

Из этого неравенства следует, что прообраз u любого элемента $w = Zu$ определен однозначно и образ этого отображения замкнут (см. предложение 17.1.7). Допустим, что $ZH_1 \neq H_1$. Тогда существует элемент v, ортогональный к этому образу:

$$(Zu, v)_1 = 0$$

для всех u. Но тогда

$$\|v\|_1^2 \leqslant \beta |\Phi(v, v)| = \beta |(Zv, v)_1| = 0,$$

так что $v = 0$. Поэтому $ZH_1 = H_1$. □

Замечание. Отметим, что

$$\|u\|_1 \leqslant \beta \|F\|. \tag{17.2.6}$$

Действительно,

$$\|F\| = \sup_{v \neq 0} \frac{|F(v)|}{\|v\|_1} = \sup_{v \neq 0} \frac{|\Phi(u, v)|}{\|v\|_1} \geqslant \frac{|\Phi(u, u)|}{\|u\|_1} \geqslant \beta^{-1} \|u\|_1.$$

17.2b. Предположим теперь, что пространство H_1 непрерывно и компактно вложено в гильбертово пространство H_0 со скалярным произведением $(u, v)_0$. Для простоты пусть

$$\|u\|_0 \leqslant \|u\|_1 \quad (u \in H_1). \tag{17.2.7}$$

При каждом $u \in H_0$ форма $(u, v)_0$ определяет непрерывный антилинейный функционал над H_1, так как

$$|(u, v)_0| \leqslant \|u\|_0 \|v\|_0 \leqslant \|u\|_0 \|v\|_1.$$

Пусть H_{-1} — сопряженное к H_1 пространство относительно продолжения этой формы, для которого мы сохраним обозначение $(u,v)_0$. Это означает, что форма $(f,v)_0$ теперь определена на $H_{-1}\times H_1$ и выражает общий вид антилинейного функционала над H_1, а при $f,v\in H_0$ совпадает со скалярным произведением в H_0. Норма функционала $f\in H_{-1}$ совпадает с $\|f\|_{-1}$:

$$\|f\|_{-1}=\sup_{v\neq 0}\frac{|(f,v)_0|}{\|v\|_1}\,. \tag{17.2.8}$$

Мы имеем включения

$$H_1\subset H_0\subset H_{-1}. \tag{17.2.9}$$

Первое из них, как мы условились, компактно. Второе непрерывно:

$$\|u\|_{-1}=\sup_{v\neq 0}\frac{|(u,v)_0|}{\|v\|_1}\leqslant\frac{\|u\|_0\|v\|_0}{\|v\|_1}\leqslant\|u\|_0.$$

Поэтому вложение H_1 в H_{-1} компактно.

Зададим теперь линейное отображение $Lu=f$ пространства H_1 в пространство H_{-1} формулой

$$(f,v)_0=\Phi(u,v),\quad v\in H_1. \tag{17.2.10}$$

При условии (17.2.1) с учетом (17.2.8) легко проверяется его непрерывность:

$$\|Lu\|_{-1}=\sup_{v\neq 0}\frac{|\Phi(u,v)|}{\|v\|_1}\leqslant\alpha\|u\|_1. \tag{17.2.11}$$

Теперь при фиксированном f рассмотрим равенство $Lu=f$ как уравнение относительно u; решение, если оно существует, можно назвать слабым решением этого уравнения.

Теорема 17.2.2. *При условиях* (17.2.1) *и* (17.2.2) *уравнение* $Lu=f$ *имеет одно и только одно слабое решение* $u\in H_1$ *для любого* $f\in H_{-1}$, *при этом обратный оператор* L^{-1} *непрерывен.*

Это очевидное следствие предыдущей теоремы и замечания к ней: функционал $(f,v)_0$ однозначно записывается в виде $\Phi(u,v)$, при этом в силу (17.2.6) и (17.2.8) норма решения оценивается через норму правой части. Более того, имеет место двусторонняя оценка (см. (17.2.11)).

Теорема 17.2.3. *В частности, теорема* 17.2.2 *верна, если условие* (17.2.2) *заменить более жестким условием*

$$\|u\|_1^2\leqslant\beta\,\mathrm{Re}\,\Phi(u,u),\quad u\in H_1. \tag{17.2.12}$$

Именно это утверждение применяется к сильно эллиптическим уравнениям в случаях сильной коэрцитивности. Для удобства ссылок мы именно его будем называть *теоремой Лакса—Мильграма*.

17.2с. Теперь приведем аналогичное утверждение для случая, когда коэрцитивность есть, но нет сильной коэрцитивности. Предварительно заметим, что для оператора L (выше он определен как ограниченный оператор из H_1 в H_{-1}) есть вторая интерпретация: можно рассматривать его как неограниченный оператор в H_{-1} с областью определения H_1.

Теорема 17.2.4. *При условиях* (17.2.1) *и*

$$\|u\|_1^2 \leqslant \beta \operatorname{Re} \Phi(u,u) + \gamma \|u\|_0^2, \quad u \in H_1, \tag{17.2.13}$$

с $\gamma > 0$ *оператор* $L : H_1 \to H_{-1}$ *фредгольмов с нулевым индексом. Если рассматривать* L *как оператор в* H_{-1} *с областью определения* H_1*, то его резольвентное множество содержит полуплоскость* $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < -\beta^{-1}\gamma\}$.

Доказательство. Заменим форму $\Phi(u,v)$ на $\Phi(u,v) + \mu(u,v)_0$. Если $\operatorname{Re}\mu > \beta^{-1}\gamma$, то новая форма удовлетворяет предположениям теоремы 17.2.3 и поэтому соответствующий оператор из H_1 в H_{-1} имеет непрерывный обратный. Этот оператор естественно записывается в виде $L + \mu I$. Единичный оператор как действующий из H_1 в H_{-1} компактен. В силу предложения 17.1.12 оператор L оказывается фредгольмовым с нулевым индексом. Первое утверждение теоремы проверено; второе очевидно. □

В § 9 в случае задачи Дирихле с однородным граничным условием пространства H_1, H_0 и H_{-1} — это $\widetilde{H}^1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$, а в случае задачи Неймана с нулевым граничным условием — соответственно $H^1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$ и $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$. В случаях, скажем, операторов D, A^{-1} и H (см. § 12) это $H^{1/2}(\Gamma)$, $L_2(\Gamma)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$. Мы надеемся, что читатель самостоятельно разберется с операторами на незамкнутой поверхности.

Включим в рассмотрение сопряженный оператор L^*. Определим его равенством

$$(Lu, v)_0 = \Phi(u,v) = (u, L^*v)_0. \tag{17.2.14}$$

Он сопоставляет элементу $v \in H_1$ элемент $L^*v \in H_{-1}$ — линейный непрерывный функционал над H_1. В §8 и §11 мы специально позаботились о том, чтобы форма $\Phi(u,v)$ не менялась при переходе к формально сопряженному уравнению, и там в случае задачи Дирихле или Неймана оператор L^* отвечает соответственно задачам Дирихле и Неймана для формально сопряженной системы. Нетрудно проверить, что и в случае операторов D, A^{-1} и H (см. § 12) он отвечает аналогичным операторам для формально сопряженной системы.

Если форма $\Phi(u, v)$ удовлетворяет условию (17.2.1) и условию (17.2.12) или (17.2.13), то соответственно теорема 17.2.3 или 17.2.4 применима и к оператору L^*. В первом случае он обратим, во втором фредгольмов. Во втором случае условия разрешимости, скажем, уравнения $Lu = f$ состоят в ортогональности правой части к решениям уравнения $L^*v = 0$ относительно формы $(f, v)_0$.

17.3. Несколько определений и фактов из спектральной теории операторов. Материал этого пункта автор предполагает подробно обсуждать в [3]. Для справок можно использовать, в частности, книги [22] и [16].

17.3а. Пусть A — замкнутый линейный оператор в бесконечномерном сепарабельном банаховом пространстве X с плотной областью определения $D(A)$. Этот оператор может быть неограниченным; замкнутость означает, что его график $\{(x, Ax)\}$, $x \in D(A)$, замкнут в прямом произведении $X \times X$. Если это ограниченный оператор, то считаем, что $D(A) = X$.

Резольвентное множество $\rho(A)$ оператора A состоит из таких точек λ комплексной плоскости, что оператор $A - \lambda I$ имеет ограниченный обратный $R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$. Этот оператор называется *резольвентой* оператора A в точке λ. Дополнение $\sigma(A)$ к резольвентному множеству называется *спектром* оператора A. Если $(A - \lambda I)x = 0$ при некотором ненулевом векторе x, то λ называется *собственным значением* оператора A и x — соответствующим ему *собственным вектором*. Собственные значения входят в спектр. Если

$$(A - \lambda I)^k x = 0$$

при некотором натуральном k и $x \neq 0$, то x называется *корневым вектором*, отвечающим собственному значению λ. В частности, при $k = 1$ это собственный вектор.

В спектральной теории эллиптических уравнений и задач в ограниченной области или на компактном многообразии особенно интересны два класса операторов.

1. *Компактные операторы T.* (В этом случае сейчас пишем букву T вместо A.) Спектр компактного оператора в бесконечномерном пространстве состоит из нуля и изолированных ненулевых собственных значений конечной кратности; если их бесконечно много, то скапливаться они могут только к нулю. Конечность кратности собственного значения $\lambda_0 \neq 0$ — это конечномерность соответствующего корневого подпространства, состоящего из отвечающих λ_0 корневых векторов и нулевого вектора. Если T — компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, то все его корневые векторы собственные и из них можно составить ортонормированный базис в этом пространстве.

2. *Операторы с компактной резольвентой.* Так называется неограниченный оператор A, *резольвента* $(A - \lambda I)^{-1}$ которого при некотором λ_0 существует и компактна. Спектр такого оператора состоит из изолированных собственных значений конечной кратности, которые не имеют конечных точек накопления. Конечность кратности снова означает конечномерность соответствующего корневого подпространства. Резольвента $(A - \lambda I)^{-1}$ компактна при всех $\lambda \in \rho(A)$. Такие операторы A называют также *операторами с дискретным спектром*.

Пусть X — сепарабельное банахово пространство. Система векторов $\{f_j\}_1^\infty$ в X называется *полной* в этом пространстве, если их конечные линейные комбинации плотны в X.

17.3b. Пусть снова A — неограниченный замкнутый оператор в X с плотной областью определения. Предположим, что на комплексной плоскости имеется выходящий из начала координат луч, на котором все λ с достаточно большим модулем принадлежат резольвентному множеству и в этих точках справедлива оценка

$$\|R_A(\lambda)\|_X \leqslant C(1 + |\lambda|)^{-1}. \tag{17.3.1}$$

Быстрее, чем $|\lambda|^{-1}$, норма резольвенты убывать не может ([64, с. 182]), поэтому назовем такой луч *лучом максимального убывания нормы резольвенты*[1]. Несложно проверяется, что такие лучи образуют открытое множество. Если имеется угол Λ на комплексной плоскости с вершиной в начале, в котором при достаточно больших $|\lambda|$ резольвента существует и удовлетворяет оценке (17.3.1), то назовем его *углом максимального убывания нормы резольвенты*.

[1] Термин Агмона «луч минимального роста нормы резольвенты» кажется нам менее удачным.

Пусть теперь $X = H$ — (сепарабельное) гильбертово пространство со скалярным произведением (u, v) и A — неограниченный самосопряженный оператор в H с дискретным спектром. Не вдаваясь в общеизвестные определения (см., например, [22], [5] или [9]), можем описать его так. Имеется ортонормированный базис $\{e_j\}_1^\infty$ в H, состоящий из собственных векторов этого оператора. Любой вектор $x \in H$ можно записать в виде

$$x = \sum_1^\infty (x, e_j) e_j, \tag{17.3.2}$$

и здесь $\|x\|_H^2 = \sum |(x, e_j)|^2$. Оператор A допускает представление

$$Ax = \sum_1^\infty \lambda_j (x, e_j) e_j, \quad x \in D(A), \tag{17.3.3}$$

здесь λ_j — его собственные значения, отвечающие собственным векторам e_j. Все корневые векторы являются собственными. Область определения $D(A)$ выделяется условием

$$\sum |\lambda_j|^2 |(x, e_j)|^2 < \infty. \tag{17.3.4}$$

Если собственных значений обоих знаков бесконечно много, то можно принять, что они занумерованы целыми числами с учетом кратностей в порядке неубывания, тогда $\lambda_j \to \pm\infty$ при $j \to \pm\infty$. Оператор называется *полуограниченным снизу*, если отрицательных собственных значений нет или их число конечно. В этом случае собственные значения обычно нумеруют натуральными числами в порядке неубывания с учетом кратностей, тогда $\lambda_j \to +\infty$. Если все собственные значения неотрицательны или положительны, то оператор называется соответственно *неотрицательным* или *положительным*.

Любой замкнутый угол с вершиной в начале, не содержащий вещественных лучей $\mathbb{R}_\pm$, является в этом случае углом максимального убывания нормы резольвенты $R_A(\lambda)$. Это следует из того, что норма резольвенты самосопряженного оператора в невещественной точке λ равна $\sup |\lambda - \lambda_j|^{-1}$. Если оператор A полуограничен снизу, то сказанное верно для угла, не содержащего $\mathbb{R}_+$.

17.3c. Для неограниченного положительного самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве H можно определить его степени A^t, в частности с вещественными t. При $t > 0$ для этого надо в спектральном разложении оператора A

$$A = \int \lambda \, dE_\lambda$$

заменить λ на λ^t.

Рассмотрим подробно случай положительного самосопряженного оператора A с дискретным спектром в гильбертовом пространстве H.

Пусть $t > 0$. Определим оператор A^t формулой

$$A^t x = \sum \lambda_j^t (x, e_j) e_j. \tag{17.3.5}$$

Его область определения — подпространство $H_t = D(A^t)$ в H, выделяемое условием

$$\sum \lambda_j^{2t} |(x, e_j)|^2 < \infty. \tag{17.3.6}$$

Это тоже самосопряженный положительный оператор с дискретным спектром, он имеет те же собственные векторы e_j и собственные значения λ_j^t. В H_t вводится норма $\|x\|_t$, равная квадратному корню из левой части в (17.3.6); легко определяется соответствующее скалярное произведение и проверяется полнота системы векторов e_j.

Далее, при $t < 0$ определим пространство H_t как состоящее из таких формальных в общем случае сумм

$$x = \sum c_j e_j \tag{17.3.7}$$

(заведомо неформальных, если они конечны), что выполнено условие

$$\sum \lambda_j^{2t} |c_j|^2 < \infty. \tag{17.3.8}$$

Вектор x задается набором своих коэффициентов Фурье $c_j = (x, e_j)$. Норма вектора x в H_t определяется как квадратный корень из левой части в (17.3.8). Снова легко вводится соответствующее скалярное произведение и проверяется полнота системы векторов e_j.

Получается шкала гильбертовых пространств $\{H_t\}$, $-\infty < t < \infty$, сужающихся с ростом t. Оператор A^s изоморфно и непрерывно отображает H_t на H_{t-s} при всех s, и операторы A^t образуют группу: $A^s A^t = A^{s+t}$.

Если оператор только неотрицателен и есть нулевое собственное значение, то можно рассматривать *полугруппу* операторов A^t с $t \geqslant 0$ и соответствующие пространства H_t.

Степени более общих позитивных операторов затрагиваются у нас в п. 13.9.

В случае самосопряженного оператора A с дискретным спектром и собственными значениями λ_j обоих знаков пространства H_t можно определить при помощи степеней оператора $|A|$ с собственными значениями $|\lambda_j|$ и теми же собственными векторами. Предположим для простоты, что нуль не является собственным значением; тогда степени оператора $|A|$ снова образуют группу и мы имеем шкалу пространств H_t, $-\infty < t < \infty$. Оператор $|A|$ остается самосопряженным в этих пространствах (как и степени $|A|^s$) и сохраняет тот же базис из собственных векторов.

Степени можно определять и для компактного самосопряженного оператора.

17.3d. Если задан несамосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, то возникает вопрос о полноте системы его корневых векторов в этом пространстве. Укажем два удобных признака полноты.

Предварительно заметим, что если T — компактный оператор, то T^* — тоже компактный оператор и TT^* — самосопряженный компактный неотрицательный оператор. Отличные от нуля собственные значения оператора $(TT^*)^{1/2}$, занумерованные в порядке невозрастания с учетом кратности, обозначим через $s_j(T)$. Это так называемые *s-числа* оператора T. Если $s_j = O(j^{-p})$ при некотором $p > 0$, то говорят, что этот оператор имеет *конечный порядок*. Число p называют *порядком компактного оператора T*; нижнюю грань таких чисел можно назвать точным порядком оператора T.

Предложение 17.3.1. *Пусть*

$$A = A_0 + A_1, \tag{17.3.9}$$

где A_0 — самосопряженный положительный оператор с дискретным спектром, причем A_0^{-1} имеет конечный порядок, а оператор A_1 компактен относительно A_0 в следующем смысле: оператор $A_1 A_0^{-1}$ компактен. Тогда система корневых векторов оператора A полна в H.

Оператор A указанного здесь вида называется *слабым возмущением самосопряженного оператора A_0* или *оператором, близким к самосопряженному оператору A_0*. Приведенное предложение содержится в книге [16, гл. V]. Там же приведен его аналог для компактных операторов.

Следующий результат фактически содержится в книге [17, т. II, гл. XI, п. 9].

Предложение 17.3.2. *Предположим, что оператор A_0^{-1} имеет порядок p и что A имеет такие лучи максимального убывания нормы резольвенты, что максимальный из углов между соседними лучами меньше π/p. Тогда система корневых векторов оператора A полна в H.*

Это предложение обобщается на операторы в банаховом пространстве (см. [106]).

Система векторов $\{e_j\}_1^\infty$ в банаховом пространстве X называется *базисом*, если любой вектор $x \in X$ представим в виде ряда

$$x = \sum_1^\infty c_j e_j \tag{17.3.10}$$

с однозначно определенными коэффициентами $c_j = c_j(x)$, сходящегося по норме в X. Если $X = H$ — гильбертово пространство и A — самосопряженный оператор в H с дискретным спектром (или самосопряженный компактный оператор), то такой базис (ортонормированный) составляется из его собственных векторов. Ряд (17.3.10) называется в этом случае *рядом Фурье вектора x по собственным векторам оператора A*, а $c_j(x)$ — *коэффициентами Фурье* в этом ряде.

В общем случае необходимые предпосылки для базисности системы векторов — ее полнота и минимальность. Полная система векторов называется *минимальной*, если она теряет полноту при удалении из нее хотя бы одного вектора.

Для минимальности заданной полной системы $\{f_j\}_1^\infty$ векторов необходимо и достаточно наличие биортогональной к ней системы векторов $\{g_k\}_1^\infty$.

Пусть оператор A с дискретным спектром имеет полную систему корневых векторов $\{e_j\}_1^\infty$. Она составляется из базисов в корневых подпространствах: берется один базис в каждом корневом подпространстве. Пусть сопряженный оператор A^* тоже имеет такую систему корневых векторов $\{g_j\}_1^\infty$. Тогда эти две системы можно подчинить условию биортогональности: $(e_j, g_k) = \delta_{j,k}$. См. [11], Добавление, или [65, гл. 5]. В этом случае в (17.3.10) $c_j = (x, g_j)$.

Только что сказанное обобщается на операторы в банаховом пространстве.

Более деликатным, чем вопрос о полноте, является вопрос о том, когда система $\{e_j\}$ корневых векторов сохраняет в какой-то мере свойство базисности. В настоящей книге мы этот вопрос не обсуждаем, он откладывается до [3].

17.4. Псевдодифференциальные операторы. Пусть $a(x,\xi)$ — бесконечно гладкая функция на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. *Псевдодифференциальный оператор с символом* $a(x,\xi)$ определяется формулой

$$Au(x) = a(x,D)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)(Fu)(\xi)\,d\xi \qquad (17.4.1)$$

первоначально на функциях из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Пока для простоты считаем их скалярными. Здесь F — преобразование Фурье: $u(x) \to (Fu)(\xi)$. Выражение (17.4.1) — это как бы «обратное преобразование Фурье» от aFu, но от x оно зависит «дважды»: x содержится в показателе экспоненты и в символе $a(x,\xi)$.

Чтобы определение (17.4.1) имело смысл и было содержательным, надо подчинить символ некоторым условиям. Простейший набор условий состоит в следующем: при некотором вещественном m

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|} \qquad (17.4.2)$$

для всех мультииндексов α, β, где постоянные зависят от a и не зависят от x, ξ.[1]

При этих условиях оператор (17.4.1) продолжается до оператора, действующего ограниченным образом из $H^s(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ при всех s. Число m называется *порядком* псевдодифференциального оператора A. В русской литературе используется сокращение ПДО, в англоязычной ΨDO.

Простейший пример — оператор в частных производных натурального порядка m

$$A = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha \qquad (17.4.3)$$

с бесконечно гладкими коэффициентами, имеющими ограниченные производные всех порядков. В этом случае символ очевидным образом выражается формулой

$$a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha. \qquad (17.4.4)$$

Пример ПДО нулевого порядка — оператор умножения на бесконечно гладкую функцию $a(x)$, она является символом этого оператора. Более общие ПДО нулевого порядка указываются ниже в (17.4.8).

[1] Теория более общих псевдодифференциальных операторов содержится, например, в [59].

Пусть теперь m отрицательно. Тогда, по крайней мере при $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, можно воспользоваться теоремой Фубини и переписать формулу (17.4.1) в виде

$$Au(x) = \int K(x, y)u(y)\,dy,$$
$$\text{где } K(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i(x-y)\cdot\xi}a(x, \xi)\,d\xi. \tag{17.4.5}$$

Это ПДО в *x-представлении*. Функция $K(x, y)$ называется его *ядром*. Таким образом, класс ПДО содержит много интегральных операторов. На самом деле x-представление допускает ПДО любого порядка, если пользоваться его ядром в смысле Шварца (см. [2]).

Важнейшие факты *исчисления* ПДО — это теоремы следующего содержания.

1. Произведение $AB = a(x, D)b(x, D)$ двух ПДО порядков m_1 и m_2 — это ПДО C порядка $m_1 + m_2$ с символом

$$c(x, \xi) = a(x, \xi)b(x, \xi) \tag{17.4.6}$$

с точностью до прибавления ПДО порядка не выше $m_1 + m_2 - 1$.

2. Оператор, формально сопряженный к ПДО $A = a(x, D)$ порядка m относительно скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^n)$, есть ПДО A^* того же порядка с эрмитово сопряженным к $a(x, \xi)$ символом $a^*(x, \xi)$ с точностью до прибавления ПДО порядка не выше $m - 1$. В скалярном случае $a^* = \bar{a}$, но можно рассматривать и матричные операторы: $u(x)$ — вектор-столбец, $a(x, \xi)$ — матрица, для простоты квадратная. Тогда a^* — эрмитово сопряженная к a матрица. Формальная сопряженность означает, что

$$(A\varphi, \psi)_{\mathbb{R}^n} = (\varphi, A^*\psi)_{\mathbb{R}^n}$$

на функциях φ, ψ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

На самом деле для символов ПДО AB и A^* строятся асимптотические разложения по символам ПДО убывающих порядков.

Особенно содержательно это исчисление в случае так называемых *полиоднородных* ПДО. Это случай, когда символ допускает асимптотическое разложение (приводим его в наиболее простом варианте)

$$a(x, \xi) \sim a_0(x, \xi) + a_1(x, \xi) + \ldots, \tag{17.4.7}$$

где функции $a_j(x, \xi)$ положительно однородны по ξ степени $m - j$. Смысл разложения следующий: если $\theta(\xi)$ — любая бесконечно гладкая функция, равная 0 в окрестности начала и 1 вне большей окрестности, то при любом целом неотрицательном N функция

$$\theta(\xi)\left[a(x,\xi)-\sum_{j=0}^{N}a_j(x,\xi)\right]$$

есть символ ПДО порядка не выше $m-N-1$. Очевидно, что дифференциальные операторы — частный случай полиоднородных ПДО.

Полиоднородные ПДО порядка $m=0$ принадлежат к классу так называемых *сингулярных интегральных операторов*. В x-представлении они выглядят так:

$$Au(x)=a(x)u(x)+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x-y|>\varepsilon}K(x,y)u(y)\,dy. \tag{17.4.8}$$

Интеграл здесь понимается в смысле главного значения по Коши. Подробнее: ядро $K(x,y)$ имеет вид $k(x,x-y)$, где функция $k(x,z)$ (или ее главная часть) положительно однородна по z критической степени $-n$: $k(x,tz)=t^{-n}k(x,z)$, $t>0$. Интеграл от нее по единичной сфере $|z|=1$ предполагается равным нулю, именно это обеспечивает существование интеграла (17.4.8) в смысле главного значения по Коши.

Функция $a_0(x,\xi)$ называется *главным символом* полиоднородного ПДО.

Произведение AB полиоднородных ПДО A и B — полиоднородный ПДО. Его главный символ — произведение a_0b_0 главных символов a_0 и b_0 ПДО A и B. Поэтому если полиоднородные ПДО A и B порядков m_1 и m_2 имеют перестановочные главные символы (например, если это скалярные операторы), то коммутатор $AB-BA$ — полиоднородный ПДО порядка не выше m_1+m_2-1. ПДО A^*, формально сопряженный к полиоднородному ПДО A, — тоже полиоднородный ПДО, его главный символ является эрмитово сопряженным к главному символу ПДО A.

Равномерное *условие эллиптичности* — это неравенство

$$|a_0(x,\xi)|\geqslant C|\xi|^m \tag{17.4.9}$$

в скалярном случае с положительной постоянной C; в матричном случае в простейшей ситуации аналогичное условие накладывается на определитель матрицы a_0.

Доказывается, что тогда $a_0^{-1}(x,\xi)$ — символ ПДО B, тоже полиоднородного, порядка $-m$ и тоже эллиптического. Ясно, что AB и BA

отличаются от единичного оператора на ПДО порядка -1. Поэтому B — квазипараметрикс для эллиптического ПДО A (ср. с § 6).

Проверяется, что при диффеоморфизме $y = y(x)$, с ограниченными производными всех порядков этого и обратного преобразования, полиоднородный ПДО A переходит в полиоднородный ПДО B с главным символом

$$b_0(y, \eta) = a_0\left(x(y), \left(\left[\frac{\partial x}{\partial y}\right]'\right)^{-1}\eta\right). \tag{17.4.10}$$

Эта формула важна для перехода к ПДО на многообразии. Из нее, кстати, видна инвариантность условий эллиптичности (и сильной эллиптичности) относительно невырожденных гладких преобразований координат.

Пусть теперь M — бесконечно гладкое компактное многообразие. ПДО A на M определяется следующим образом. Если φ и ψ — бесконечно гладкие функции с носителями в одной координатной окрестности U, то

$$\varphi A \psi u = \varphi A_U \psi u, \tag{17.4.11}$$

где A_U — ПДО в $\mathbb{R}^n$ в соответствующих локальных координатах. Если же φ и ψ имеют непересекающиеся носители, то $\varphi A \psi$ — оператор порядка $-\infty$.

Формула (17.4.10) позволяет определить полиоднородный ПДО порядка m на M; при этом именно в силу этой формулы главный символ $a_0(x, \xi)$ оказывается инвариантно определенным как функция на кокасательном расслоении $T^*(M)$ многообразия M. Такой ПДО действует ограниченным образом из $H^s(M)$ в $H^{s-m}(M)$ при всех s. Исчисление глобально строится на уровне главных символов. Естественным образом определяется эллиптичность такого ПДО. Доказывается, что эллиптичность ПДО A порядка m эквивалентна его фредгольмовости как оператора из $H^s(M)$ в $H^{s-m}(M)$, причем индекс не зависит от s в силу соответствующей теоремы о гладкости. Все это обобщение материала § 6. При этом вся аналитическая работа оказывается уже проведенной при построении исчисления.

В частности, можно рассматривать сингулярные интегральные операторы на многообразии.

Упомянем, что на стандартном торе можно рассматривать ПДО, определяя их при помощи рядов Фурье вместо преобразования Фурье:

$$a(x, D)u(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} a(x, \alpha) e^{-i\alpha \cdot x} c_\alpha(u),$$

где $c_\alpha(u)$ — коэффициенты Фурье функции u; символ $a(x, \xi)$ используется при этом только в точках $\xi = \alpha$ с целочисленными координатами. Мы воспользовались этим в п. 12.1.

Исчисление псевдодифференциальных операторов в его нынешнем виде возникло в 60-е годы прошлого века. Первоначально эллиптические ПДО понадобились и сыграли важнейшую роль при решении проблемы вычисления индекса эллиптических дифференциальных операторов, а именно, при использовании гомотопий. Гомотопии по многочленам (главным символам дифференциальных эллиптических операторов) затруднительны. Правда, главные символы ПДО — бесконечно гладкие при $\xi \neq 0$ функции. Но гомотопию по непрерывным функциям (на «единичных» кокасательных векторах, если M — риманово многообразие) можно аппроксимировать гомотопией по бесконечно гладким функциям.

В дальнейшем быстро выяснилось, что ПДО на самом деле встречаются, очень нужны и очень полезны в огромном количестве задач анализа, в особенности задач, в которых надо выяснять те или иные асимптотики.

Сильная эллиптичность полиоднородного ПДО определяется как равномерная положительная определенность действительной части его главного символа. См. статью Костабеля—Вендланда [221] и монографию Хсиао—Вендланда [79].

Мы наметили содержание теории ПДО для «бесконечно гладких» ситуаций. На самом деле ПДО можно определить и рассматривать в ситуациях, когда гладкость рассматриваемых функций является ограниченной или очень мала. Такие ситуации будут обсуждаться в [3].

§ 18. Дополнительные замечания и литературные указания

Читателю нужно иметь в виду, что ряд вопросов, которые мы обсуждали, параллельно изучали многие математики, и пытаться в этих случаях детально разобраться, кто сделал что-то раньше других, — крайне неблагодарная и часто неразрешимая задача. Это относится и к работам по теории пространств типа Соболева, и к работам по теории эллиптических задач.

Значительно более полные ссылки на литературу можно найти в цитируемых нами монографиях.

Предупредим читателя также о том, что статьям, которые мы приводим в литературе, могли предшествовать краткие заметки тех же авторов, опубликованные раньше, а книгам могли предшествовать многие работы.

18.1. К главе I.

Теория пространств типа Соболева, в изрядной степени и теория обобщенных функций, ведут свое начало от работ С. Л. Соболева в 30-е годы XX в., отраженных в его монографии [48]. Литература по этой тематике огромная, по существу это продолжающий развиваться обширный раздел функционального анализа. Как уже было сказано, С. Л. Соболев рассмотрел пространства W_p^s с целым неотрицательным s. Пространства W_p^s дробного неотрицательного порядка s ввел Л. Н. Слободецкий [160, 161]. Случаю $p=2$ посвящена его подробная статья [160]. Как потом выяснилось, пространства дробного порядка появились немного раньше в работе [188]. Статья [193] была одной из первых работ по пространствам H^s в $\mathbb{R}^n$. Укажем ее продолжения: [190], [175], [174], [191]. См. также работу Кальдерона [210] о пространствах H_p^s.

К п. 1.14 и 1.15.

В современной литературе дискретные нормы используются при рассмотрении очень общих пространств — Трибеля—Лизоркина и Бесова с тремя индексами. У нас эти определения приведены в п. 14.7. В п. 1.14 мы привели определения самых простых дискретных норм для пространств H^s, а в п. 1.15 показали, как их можно использовать для доказательства одной из теорем вложения Соболева.

Вопросами продолжения функций из областей или с поверхностей меньшей размерности занимались очень многие математики; подробные указания можно найти в статье [155] и книгах [8], [42] и [80].

Аналог оператора продолжения Хестенса функций из полупространства или области с гладкой границей в $\mathbb{R}^n$ для пространств H^s с $s \in \mathbb{R}$ (и более общих функциональных пространств) можно найти в [98, п. 4.5.5], и [293].

Оператор Сили [306] продолжения функций из полупространства $\mathbb{R}^n_+$ в $\mathbb{R}^n$ строится следующим образом. Проверяется, что существуют последовательности чисел $\{a_k\}_0^\infty$ и $\{b_k\}_0^\infty$ со свойствами

1) $b_k < 0$ и $b_k \to -\infty$,

2) $\sum\limits_0^\infty |a_k|\,|b_k|^m < \infty$ при всех целых неотрицательных m,

3) $\sum\limits_0^\infty a_k (b_k)^m = 1$ при всех целых неотрицательных m.

Пусть $\varphi(t)$ — бесконечно гладкая функция на прямой, равная 1 на $[0, 1]$ и 0 при $t \geqslant 2$. Полагаем при $x_n < 0$

$$Eu(x', x_n) = \sum_0^\infty a_k \varphi(b_k x_n) u(x', b_k x_n). \tag{18.1.1}$$

Этот оператор переводит $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ в $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и, как отмечено в [306], годится в качестве оператора продолжения для пространств Соболева W^s_p.

См. также ниже наши литературные указания к § 14, относящиеся к более общим пространствам.

К п. 3.4.

Одно из доказательств теоремы 3.4.1 содержится в [112]. См. также [52]. Здесь мы следуем работе Г. Н. Яковлева [173].

18.2. К главе II.

Общее определение эллиптической системы дал И. Г. Петровский в работе [157], где основной результат состоял в аналитичности решений эллиптических систем с аналитическими коэффициентами.

К § 7.

Появлению общего результата «эллиптичность задачи $\Longleftrightarrow$ ее фредгольмовость» предшествовало огромное количество исследований. О развитии теории эллиптических уравнений до 1953 г. дает представление монография Миранды [36], позднее переизданная [88]. О достижениях советской математической школы в области эллиптических уравнений к 1957 г. можно составить впечатление по обзорной статье [129].

Общее определение сильной эллиптичности в 1951 г. дал, как мы уже отмечали, М. И. Вишик [126]. Эта работа, написанная до создания общей теории эллиптических задач, имела очень большой резонанс в литературе. Общее неравенство Гординга для скалярной задачи Дирихле появилось в работе [239] и позднее для общей матричной задачи Дирихле в [280]. Проблема нахождения условий коэрцитивности в других задачах для сильно эллиптических уравнений и систем высокого порядка изучалась, в частности, в работах [189], [314], [177], [299]. Но, видимо, проще смотреть монографии [64], [91], [30], [87], где можно найти и дальнейшие ссылки.

В 1952 г. вышла работа М. И. Вишика [127], в которой к описанию задач для эллиптических уравнений предложен абстрактный подход в терминах расширений операторов. Расширения с теми или иными свойствами описываются при помощи граничных условий. Это направление развивалось в работах многих авторов, особенно в связи с вопросами спектральной теории.

Важнейшей на пути создания общей теории эллиптических задач была уже указанная в § 7 работа Я. Б. Лопатинского [148]. Она включена также в книгу [31]. В этой работе рассмотрены общие граничные задачи для эллиптической системы в многомерной выпуклой области с порядком граничных операторов ниже порядка системы. Фактически там и появилось «условие Лопатинского». Метод исследования — сначала явное решение задачи с постоянными коэффициентами в полупространстве, затем сведе́ние задачи в ограниченной области к фредгольмовым интегральным уравнениям на границе. Такие же идеи появились в работах З. Я. Шапиро [168] (Лопатинский использовал результаты этой работы в качестве примера) и [169], но в меньшей общности.

Следует отметить, что понятие эллиптичности намного раньше появилось в другой области анализа, но под другим названием.

Мы имеем в виду теорию одномерных сингулярных интегральных уравнений (скалярных и матричных), где эллиптические уравнения назывались уравнениями нормального типа (см., например, [39]). Задачи для эллиптических уравнений в двумерных областях допускают свед́ение к одномерным сингулярным уравнениям на границе, и это не только способ доказательства фредгольмовости этих задач, но и путь к вычислению их индекса, так как формула для индекса одномерных сингулярных интегральных операторов была давно известна. Общую теорию эллиптических задач в двумерных областях с вычислением индекса построил А. И. Вольперт [132].

Только позднее возникло понимание того, что эти понятия эллиптичности — для граничных задач и для сингулярных интегральных уравнений — одной природы. Это мы обсудим в [3].

Большое влияние на исследование эллиптических уравнений и задач, как мы уже упоминали в п. 6.3, оказала статья И. М. Гельфанда [133], в которой была поставлена проблема нахождения гомотопических инвариантов и индекса эллиптического оператора. Она стимулировала прежде всего завершение теории эллиптических дифференциальных уравнений и задач, а также разработку ее обобщений на псевдодифференциальные уравнения и задачи, понадобившиеся в первую очередь для гомотопий при вычислении индекса.

Общие априорные оценки для решений эллиптических задач в шаудеровских и соболевских L_p-нормах были получены в работах Ш. Агмона, А. Дуглиса и Л. Ниренберга [1] в скалярном случае и [179] в матричном случае для систем, эллиптических по Дуглису—Ниренбергу [229]. Но фредгольмовость задачи выводится из одних только априорных оценок, только если можно использовать сопряженную задачу.

Мы привели в литературе также ряд работ Ф. Браудера и М. Шехтера, сыгравших существенную роль в завершении доказательства эквивалентности эллиптичности и фредгольмовости. Параметрикс в эллиптических задачах появился у Ф. Браудера [204]. Его аналогом в теории сингулярных интегральных уравнений был регуляризатор. Общую и прозрачную конструкцию параметрикса предложил А. С. Дынин [137, 138], по существу завершивший доказательство теоремы «эллиптичность задачи $\Longleftrightarrow$ ее фредгольмовость» в скалярном случае.

Сингулярный интегро-дифференциальный оператор у Дынина [137] — это дифференциальный оператор, в котором коэффициентами являются сингулярные интегральные операторы. По существу это непосредственный предшественник псевдодифференциального оператора. В [137] рассмотрены общие эллиптические операторы такого вида на замкнутом многообразии и в [138] — общие эллиптические граничные задачи с такими граничными условиями для скалярного эллиптического уравнения. Дальнейшие обобщения см. в [114] и [100]. Общую теорию псевдодифференциальных эллиптических задач первоначально построили М. И. Вишик — Г. И. Эскин в серии статей (см. монографию [62]) и Буте де Монвель [200, 201].

Эллиптические с параметром задачи первоначально рассмотрел Ш. Агмон [178]. Но у него не было правого обратного оператора, для получения результата об однозначной разрешимости использовалась сопряженная задача. В [112], в частности, построен правый обратный оператор по образцу правого параметрикса у Дынина. Продолжением работы [178] является работа Ш. Агмона и Л. Ниренберга [180]; в ней и в [112] рассматриваются и параболические задачи.

Понятия нормальной системы граничных условий, системы Дирихле и сопряженной задачи и общая формула Грина появились в [192]. Этот материал изложен заново и используется у М. Шехтера [301, 302]. В дальнейшем он перешел в книгу Лионса—Мадженеса [30], которой предшествовали статьи этих авторов. Наше изложение в п. 7.3 несколько проще, так как там мы уже можем пользоваться теорией общих эллиптических задач с неоднородными граничными условиями. Обобщения на системы можно смотреть в заметках Я. А. Ройтберга—З. Г. Шефтеля [159], С. Я. Львина [150] и статье Р. В. Дудучавы [230], где обсуждаются также поверхностные потенциалы и проекторы Кальдерона в общей теории эллиптических задач.

Замечание о нормальности граничных условий при наличии луча эллиптичности с параметром сделали Бурак [208] и Сили [308].

Проекторы Кальдерона [140] — это проекторы на границе на данные Коши для эллиптического уравнения во внутренней и внешней области. Кальдерон ввел их именно для изучения общих эллиптических задач. См. также [307] и [221]. В главе III поверхностные потенциалы и проекторы Кальдерона рассмотрены у нас для сильно эллиптических систем 2-го порядка в липшицевых областях. В контексте общей теории эти проекторы удобно рассматривать, имея исчисление псевдодифференциальных операторов, так что эту тему мы тоже откладываем до [3].

В книге Ж.-Л. Лионса и Э. Madженеса [30] построены шкалы пространств для индекса s, принимающего любые вещественные значения, в которых получаются теоремы о фредгольмовости эллиптических задач. Если s не меньше порядка уравнения, то это пространства обычных функций с гладкостью, повышающейся с ростом s. При отрицательных s используется транспозиция — переход к сопряженной задаче — и получаются пространства обобщенных функций, при промежуточных s используется интерполяция. Книга [30] доступна и хорошо известна, и мы не останавливались на описании этих результатов, отметим только, что для транспозиции пространства для гладких решений и правых частей сопряженной задачи строятся там «заново», чтобы после транспозиции иметь пространства обобщенных функций в области Ω. Таким пространством сопряженное к $H^s(\Omega)$ пространство $\widetilde{H}^{-s}(\Omega)$ при $s > 1/2$ не является, поскольку содержит функционалы, сосредоточенные на границе.

Сопряженный оператор к оператору, отвечающему эллиптической задаче, существует, конечно, и для задач, в которых граничные условия не являются нормальными, и он тоже допускает содержательное исследование и использование. См., например, [134].

Остановимся на другом подходе к рассмотрению общих эллиптических задач при всех значениях параметра s. Ему посвящена монография Я. А. Ройтберга [94], которой предшествовали работы Ю. М. Березанского, С. Г. Крейна и Я. А. Ройтберга (см., например, [117]), а также многочисленные работы Я. А. Ройтберга и других математиков. Эта тема освещена также в монографии Ю. М. Березанского [7].

Рассмотрим эллиптическую задачу (7.1.3), (7.1.4) в ограниченной области Ω для простоты с бесконечно гладкой границей Γ и порядками r_j граничных операторов ниже порядка системы. Введем пространство $H_s(\Omega, \Gamma)$, состоящее из наборов $U = (u, u_1, \ldots, u_{2l})$. Очень грубо говоря, u будет решением эллиптического уравнения в Ω, а u_j — следами в обобщенном в общем случае смысле от его производных по нормали порядков $0, \ldots, 2l-1$.

Более точно, u — функция из $H^s(\Omega)$, если $s \geqslant 0$, и из $\widetilde{H}^s(\Omega)$, если $s < 0$, а u_j принадлежат $H^{s-j+1/2}(\Gamma)$. Для простоты исключим полуцелые s между нулем и $2l$. Если $s > 2l - 1/2$, то u_j с $j \geqslant 1$ — следы производных $\partial_\nu^{j-1} u$ по нормали на границе от u в $H^{s-j+1/2}(\Gamma)$, они в этом случае существуют в обычном смысле. Если $s < 1/2$, то u_j — произвольные элементы из $H^{s-j+1/2}(\Gamma)$. Для промежуточных s это следы нормальных производных порядка $j-1$ в $H^{s-j+1/2}(\Gamma)$, пока они существуют в обычном смысле, и произвольные элементы из этого пространства для остальных j. В этом пространстве $H_s(\Omega, \Gamma)$ вводится норма

$$\|U\|_{H_s(\Omega,\Gamma)} = \left(\|u\|^2_{H^s(\Omega)} + \sum_1^{2l} \|u_j\|^2_{H^{s-j+1/2}(\Gamma)}\right)^{1/2}, \qquad (18.2.1)$$

где $\|u\|_{H^s(\Omega)}$ заменяется на $\|u\|_{\widetilde{H}^s(\Omega)}$ при отрицательных s. Проверяется, что это полное пространство и что в нем плотен линеал, состоящий из «гладких» наборов $U=(u, u_1, \ldots, u_{2l})$, где функция u принадлежит $C^\infty(\overline{\Omega})$, а u_j — следы ее нормальных производных.

Отвечающий задаче (7.1.3), (7.1.4) оператор $\mathfrak{A}$ рассматривается как действующий из этого пространства в прямое произведение 1) пространства $H^{s-2l}(\Omega)$ при $s \geqslant 2l$ и $\widetilde{H}^{s-2l}(\Omega)$ при $s<2l$ и 2) пространств $H^{s-r_j-1/2}(\Gamma)$ $(j=1, \ldots, l)$ с соответствующей нормой. Все коэффициенты предполагаются бесконечно гладкими. Само действие определяется так: любой элемент U аппроксимируется гладкими элементами U_k в пространстве $H_s(\Omega, \Gamma)$ $(k \to \infty)$, тогда $\mathfrak{A}U_k$ имеет обычный смысл; проверяется, что предел $(f, g_1, \ldots, g_l)$ существует и не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности. Этот предел и принимается за $\mathfrak{A}U$.

Основной результат состоит в том, что эллиптичность эквивалентна фредгольмовости, причем индекс не зависит от s. Получается и локальная теорема о повышении гладкости. В случае эллиптичности с параметром получается однозначная разрешимость при больших значениях параметра. Если задача нормальная, то получается обычное уточнение описания области значений оператора $\mathfrak{A}$. Результаты распространяются на системы, эллиптические по Дуглису—Ниренбергу, а также на пространства бесселевых потенциалов и пространства Бесова с $p \neq 2$. Разработан ряд приложений. Если сузить промежуток рассматриваемых s, то можно ослабить предположения о гладкости.

Таким образом, главной идеей этой теории является рассмотрение наборов обобщенных решений вместе с их обобщенными нормальными производными и аппроксимация этих наборов обычными гладкими решениями с их обычными нормальными производными.

В нашем изложении теории общих эллиптических задач не затронуты некоторые темы. Во-первых, это смешанные задачи, в которых на разных частях границы на решение накладываются разные граничные условия. Такие задачи часто встречаются в приложениях, и литература по конкретным смешанным задачам очень большая. В контексте общей теории эллиптических задач укажем работу Шехтера [304]. Во-вторых, это задачи сопряжения (английский термин transmission problems), в которых решения подчиняются, вообще говоря, разным эллиптическим уравнениям, скажем, в двух граничащих областях и условиям на их общей границе, связывающим граничные значения решений и их производных в этих областях. В контексте общей теории эллиптических задач см., например, работы Шехтера [303], Ройтберга—Шефтеля [158] и Шефтеля [170]. В главе III мы рассмотрели некоторые классы смешанных задач и задач сопряжения для сильно эллиптических систем 2-го порядка в липшицевых областях.

Задачи с параметром становятся сложными, если параметру нельзя приписать определенный вес относительно дифференцирования. Спектральные задачи такого вида для систем Дуглиса—Ниренберга первым рассмотрел А. Н. Кожевников (см., например, [257]). Затем такие задачи с других позиций изучали Л. Р. Волевич, Р. Денк и Р. Менникен (см., например, [226]), Л. Р. Волевич и Р. Денк (см., например, [227, 228]).

Б. Ю. Стернин рассмотрел эллиптические уравнения с заданием граничных условий на подмногообразиях любой размерности [166].

Большая литература посвящена эллиптическим задачам с вырождением. В задаче с косой производной, о которой мы упоминали в п. 11.9, вырождение имеет место в тех точках границы, где направление дифференцирования является касательным к ней (если такие точки есть): там нарушается условие Лопатинского. Такая задача в областях с гладкой границей исследовалась во многих работах, см. обзор С. З. Левендорского и Б. П. Панеяха [144]. См. также статью М. И. Вишика и В. В. Грушина [128].

18.3. К главе III.

К § 9.

Теорема 9.1.1 — это часть более общего утверждения:

Пусть функция $\varphi(x)$ задана в открытой окрестности измеримого множества E в $\mathbb{R}^n$. Тогда она дифференцируема почти во всех *точках из E в том и только в том случае, если для почти всех $x^0 \in E$*

$$f(x^0 + y) - f(x^0) = O(|y|) \quad \textit{при} \ |y| \to 0$$

без предположения о равномерности по x^0 этой оценки.

Это утверждение названо в главе VIII книги И. Стейна [49] «знаменитой теоремой Данжуа, Радемахера и Степанова» со ссылкой только на книгу С. Сакса [47, гл. IX]. Оно доказывается в этих книгах, а также в книге Х. Уитни [54, гл. IX, п. 11], но с использованием предыдущего материала этих книг. В нашем «автономном» изложении мы в основном следовали работе В. В. Степанова [315], где рассмотрен двумерный случай и упомянуто без пояснений, что доказательство проходит и в многомерном случае. В. В. Степанов также построил пример непрерывной функции, имеющей все первые частные производные почти всюду, но не дифференцируемой ни в одной точке.

Мы совсем не затрагиваем функциональные пространства в областях и на поверхностях, более общих, чем липшицевы. Начальную информацию на эту тему можно найти в книгах Гривара [76] и Маклина [87].

К § 10.

До оператора Рычкова в литературе наиболее употребительны были операторы продолжения (через границу липшицевой области), построенные Кальдероном [210] (см. также [87], Appendix A) и Стейном [49] для пространств H_p^k с целыми неотрицательными k. Оператор Стейна в отличие от оператора Кальдерона не зависит от k и охватывает значения $p = 1$ и $p = \infty$.

Свой универсальный оператор продолжения В. С. Рычков построил в [294] для общих пространств Трибеля—Лизоркина и Бесова, мы упоминаем об этом в § 14. В нелегком доказательстве он использует «максимальные функции Петре», которых не остается в окончательной формулировке, в том числе и во «внутреннем» описании интересующих нас пространств в специальных липшицевых областях, которое и само по себе интересно. Стараясь упростить изложение, мы ограничились пространствами H^s. Удалось получить достаточно прозрачное вспомогательное предложение 10.1.2 для этого случая, позволившее освободиться от использования максимальных функций. Еще отметим, что в отличие от [294] мы обходимся без итерации конструкции из п. 10.3 и что в представлении функций из $H^s(\Omega)$ у нас получилась сходимость рядов в нормах этих пространств.

К §§ 11 и 12.

К п. 11.1.

Имеется абстрактный подход к выводу формул Грина, близких к используемым нами и приложимых к интересующим нас задачам. См. [143], [130], [4] и указанную там литературу.

К п. 11.2.

Здесь, на наш взгляд, интересны разложение Вейля и его применение, в частности, свед́ение полной задачи Неймана с неоднозначно определяемыми правыми частями к неполным задачам Дирихле и Неймана с однозначно определяемыми правыми частями [183].

К п. 11.4.

Общие смешанные задачи в липшицевых областях рассмотрены, например, в работе Б. В. Пальцева [156] и книге Маклина [87].

Отметим, что часто требуется деление границы на много частей. См., например, книгу В. И. Лебедева и В. И. Агошкова [29]. Подход с использованием пространств $H^s(\Omega; \Gamma_1)$ работает и в этом случае.

К пп. 11.4 и 12.8.

В отношении смешанных задач мы уже отметили, что им посвящена очень большая литература. Это относится к областям с гладкой и негладкой границей. В книгах [75] и [96] можно найти явные непростые формулы для решения некоторых конкретных смешанных задач. Даже если поверхности Γ_1 и Γ_2 и «ребро» гладкие, решение может иметь особенность вблизи ребра, и очень много внимания было уделено анализу этой особенности. Часто накладывалось дополнительное геометрическое условие в точках ребра, состоящее, грубо говоря, в том, что угол между нормалями к Γ_1 и Γ_2 в этих точках меньше π и равномерно отделен от π. См., например, [207], [274] и [295]. Эти вопросы мы не затрагивали.

В нескольких работах немецких и грузинских математиков рассмотрены смешанные задачи для уравнения Лапласа—Гельмгольца и систем теории упругости (система Ламе и системы анизотропной упругости) в случае гладких Γ_1, Γ_2 и $\partial\Gamma_j$; определяется вариационное решение, задача сводится к уравнениям на границе при помощи операторов типа потенциала, которые являются псевдодифференциальными операторами, и эффективно находится асимптотика решения вблизи ребра. Назовем работы Е. Стефана [97], [318] и Д. Г. Натрошвили, О. О. Чкадуа, Е. М. Шаргородского [153]. Из этих работ мы взяли подход к вариационному решению при помощи потенциалов, обобщив его на сильно эллиптические системы 2-го порядка в липшицевой области. При наших предположениях получился некоторый результат о гладкости (слабее, чем в указанных работах с сильными предположениями о гладкости коэффициентов и частей границы), но без асимптотики. Это результаты из [109], где рассмотрены также спектральные задачи.

В работах Стефана [97], [316], [317], Дудучавы, Натрошвили, Шаргородского [136], Дудучавы—Вендланда [232], Дудучавы—Натрошвили [231] для тех же уравнений и систем исследованы задачи с граничными условиями на гладкой поверхности с гладким краем при помощи потенциалов и выяснена асимптотика решения возле этого края. Снова мы заимствовали подход при помощи потенциалов, обобщив его на сильно эллиптические системы 2-го порядка в области с липшицевой границей, и получили некоторый результат о регулярности. Это результаты из [108], где тоже рассмотрены спектральные задачи.

К п. 12.9.

Задачи со спектральным параметром в условиях сопряжения для уравнения Гельмгольца предложили физики Б. З. Каценеленбаум, Н. Н. Войтович и А. Н. Сивов, см. [11] и [65]. Идея состояла в том, чтобы для этого уравнения в $\mathbb{R}^n$ или неограниченной области иметь задачи с таким спектральным параметром, что спектр дискретен. Автору довелось в этих книгах исследовать эти задачи средствами теории несамосопряженных операторов и теории эллиптических псевдодифференциальных операторов.

К п. 12.10.

Этот пункт включен и в [183]; он подсказан вопросами, которые автору задали Е. Крыпчук и С. Е. Михайлов в сентябре 2011 года.

18.4. К главе IV.

К § 13.

Теория интерполяции в банаховых пространствах распространяется на квазибанаховы пространства. См., в частности, [250].

К § 14.

Определения, с которых мы здесь начинаем, как и раньше, наиболее приближены к работам по уравнениям в частных производных, в которых эти определения используются, включая работы по уравнениям в липшицевых областях. См., например, [249], [276]. Но обойтись без появившихся позднее «дискретных определений» уже нельзя.

Существуют другие определения тех же пространств с $s > 0$ — при помощи разностей вместо производных, а также при помощи аппроксимаций, например, целыми аналитическими функциями экспоненциального типа. См., например, [8], [42], [52], [155].

Относительно пространств с тремя индексами см., например, [282], [6], [52, 53, 98]. Как указано в [293], первоначальные определения принадлежат следующим математикам:

О. В. Бесов ($B^s_{p,q}$, $s>0$, $1\leqslant p, q\leqslant\infty$) [118, 119];
М. Тейблсон ($B^s_{p,q}$, $s\in\mathbb{R}$) [321];
П. И. Лизоркин ($F^s_{p,q}$, $s>0$, $1<p, q<\infty$) [146, 147];
Х. Трибель ($F^s_{p,q}$, $s\in\mathbb{R}$, $1<p, q<\infty$) [323];
Ж. Петре ($B^s_{p,q}$ и $F^s_{p,q}$, $0<p, q\leqslant\infty$) [282, 283]).

К § 15.

Аналоги этих результатов в пространствах с тремя индексами есть в [52], см. также [95].

В монографиях [14] и [71] рассматриваются менее общие линейные задачи, но предположения о гладкости в них минимизируются, при этом излагаются очень глубокие результаты для скалярного случая (Де Джорджи, Нэша и Мозера).

К § 16.

К п. 16.3.

В значительной степени мы следуем здесь работе Саваре [296]. Доказательство изложено легче, чем в [105]. С большой пользой оно обсуждалось с Т. А. Суслиной. В частности, она предложила использовать формулу (16.3.16) и обратила внимание на то, что предположение о неотрицательности (11.7.4) не нужно в задаче Дирихле, а в задаче Неймана нужно только вблизи границы.

К п. 16.5.

В теореме 16.5.1 предположение о липшицевости коэффициентов и оценка взяты из [14, гл. 8]. Но там рассматривается скалярное уравнение с вещественными коэффициентами и его специфика используется. У Ниренберга коэффициенты $a_{j,k}$ и b_j принадлежат C^1.

Ниренберг рассматривает также уравнения и системы высокого порядка и при усилении предположений о гладкости коэффициентов и границы получает более сильные утверждения о гладкости решения. Вариационные решения задачи Дирихле оказываются гладкими обычными решениями, так что и в общем случае из сильной эллиптичности системы следует эллиптичность задачи Дирихле.

Теперь мы хотим указать несколько направлений исследований задач в липшицевых областях, не отраженных в нашей книге.

1. Мы не рассматривали задачи в областях, дополнительных к ограниченным. Здесь на первый план выступает выбор фундаментального решения и отвечающих ему условий для решений на бесконечности. Например, в случае уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$, $k > 0$, это условия излучения, которые приводятся в учебниках математической физики. Решения, локально принадлежащие прежним пространствам, подчиняются аналогичным условиям и благодаря этому допускают представления через скачки на границе. См. [124], [41, 278], [219], [102, 103].

2. Очень много работ посвящено специально задачам в полиэдральных областях и «криволинейных полиэдрах». Укажем, в частности, монографии Гривара [76], Дож [73] и Мазьи—Россмана [86].

3. *Система Стокса.* Это линеаризация уравнений Навье—Стокса движений вязкой несжимаемой жидкости. В стационарном варианте система Стокса имеет вид

$$\begin{aligned} -\nu\Delta u + \operatorname{grad} p &= f, \\ \operatorname{div} u &= 0, \end{aligned} \tag{18.4.1}$$

и рассматривать ее можно в ограниченной липшицевой области Ω. Здесь $u = (u_1, \ldots, u_n)'$ — скорость жидкости, p — давление, ν — положительная постоянная (кинематический коэффициент вязкости). Простейшее граничное условие — однородное условие Дирихле:

$$u^+ = 0. \tag{18.4.2}$$

Для нас сейчас интересно то обстоятельство, что система Стокса является «*сильно эллиптической в подпространстве*» (точнее, в нем справедливо неравенство Гординга), а именно в подпространстве V пространства $\mathring{H}^1(\Omega)$, состоящем из функций с нулевой дивергенцией. Пусть функции u и v принадлежат V.

Умножая первое уравнение скалярно на v и интегрируя по частям, получаем

$$\nu\Phi_\Omega(u, v) = (f, v)_\Omega, \tag{18.4.3}$$

где

$$\Phi_\Omega(u, v) = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla \overline{v}\, dx, \tag{18.4.4}$$

так как

$$(\operatorname{grad} p, v)_\Omega = (p, \operatorname{div} v)_\Omega = 0.$$

С учетом нулевого граничного условия (см. замечание 8.1.3) получается неравенство

$$\|u\|_V^2 \leqslant C\Phi_\Omega(u, u), \tag{18.4.5}$$

и если предположить, что f принадлежит сопряженному к V пространству, то решение u существует и единственно в V. Имея u, можно искать $p \in L_2(\Omega)$ из первого уравнения в системе (18.4.1).

За дальнейшими подробностями читатель может обратиться, например, к книге Р. Темама [51]. Литература по уравнениям Навье—Стокса и Стокса чрезвычайно обширна. В частности, полезно смотреть [235], [79], [274] и указанную там литературу.

4. Стационарная *система Максвелла* в простейшем случае имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E - ikH &= 0, \\ \operatorname{rot} H + ikE &= J \end{aligned} \tag{18.4.6}$$

(см., например, [10]). Здесь E, H — вектор-функции в трехмерной области (комплексные амплитуды электрического и магнитного полей), k — волновое число, J — плотность сторонних токов. Хотя очень важны внешние задачи и задачи в $\mathbb{R}^n$ с условиями сопряжения на компактной замкнутой поверхности, есть и содержательная задача в ограниченной области с граничным условием

$$\nu \times E = 0 \text{ на } \Gamma \tag{18.4.7}$$

(резонатор с металлической стенкой). Система Максвелла, как и система Стокса, не эллиптична, но есть разные подходы к выявлению ее «скрытой» эллиптичности или сильной эллиптичности. Упомянем, что непосредственно из (18.4.6) вытекает (так как $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$) соотношение $\operatorname{div} E = J_1$, которое на границе можно добавить к граничному условию (18.4.7):

$$\operatorname{div} E = J_1 \text{ на } \Gamma. \tag{18.4.8}$$

Из (18.4.6) вытекает также (так как $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = -\Delta + \operatorname{grad}\operatorname{div}$) *векторное уравнение Гельмгольца*

$$\Delta E + k^2 E = F \text{ в } \Omega. \tag{18.4.9}$$

Получается, как нетрудно проверить, эллиптическая задача для векторного уравнения Гельмгольца с граничными условиями (18.4.7), (18.4.8), правда, не эквивалентная исходной, но она интересна и сама по себе.

Система Максвелла изучалась в огромном числе работ, в частности, в липшицевых областях. Мы ограничимся указанием нескольких работ: [121], [218], [277].

5. Разработка теории классических задач для сильно эллиптических уравнений в липшицевых областях, начиная с уравнения Лапласа, совсем в другом направлении, чем наше, ведет начало от работ Б. Дальберга, А. Кальдерона, Д. Джерисона и К. Кенига. В частности, см. работу Кальдерона [213], обзорную статью [248] и монографию К. Кенига [81] с обширной литературой. Эта теория не отражена в основном тексте нашей книги. Часто это направление называют *программой Кальдерона*. Работ в этом направлении много, в нашем списке литературы они отражены далеко не полностью. Здесь мы очень кратко остановимся на нем и приведем несколько ссылок на литературу.

Первоначальная постановка задачи Дирихле была следующей. Пусть уравнение однородно: $Lu = 0$. В граничном условии Дирихле $u^+ = g$ правая часть принадлежит $L_2(\Gamma)$ или $H^1(\Gamma)$. Соответствующих теорем о следах в рамках теории соболевских пространств нет. Используется *некасательная сходимость*, которую мы сейчас определим. Смысл условию Дирихле в первой постановке придается такой: имеется в виду поточечная сходимость

$$u(y) \to g(x) \quad \text{при } K(x) \ni y \to x \tag{18.4.10}$$

для почти всех $x \in \Gamma$. Здесь $\{K(x)\}$ — регулярное семейство конусов в Ω с вершинами во всех точках на Γ. Эта сходимость контролируется *максимальной функцией* на Γ

$$u^*(x) = \max |u(y)|, \quad y \in K(x), \tag{18.4.11}$$

для которой в случае однозначной разрешимости выводится априорная оценка

$$\|u^*\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant C\|g\|_{L_2(\Gamma)} \tag{18.4.12}$$

или аналогичное неравенство в L_p-нормах. Во второй постановке требуется аналогичная сходимость первых производных решения; при этом оценивается максимальная функция его градиента через H^1-норму функции g. Близкий смысл придается граничному условию Неймана $T^+u = h$ с правой частью из $L_2(\Gamma)$ или $L_p(\Gamma)$, при этом снова оценивается максимальная функция градиента. Исследования в значительной степени нацелены на выяснение того, для каких p получаются результаты об однозначной разрешимости или фредгольмовости задач.

Таким образом, в этой теории «стартовые» точки — это граничные точки $(\pm 1/2, 1/2)$ нашего квадрата Q, тогда как у нас стартовая точка — центр $(0, 1/2)$ этого квадрата.

Нелегкий и наиболее важный технический аппарат — операторы типа потенциала (простого или двойного слоя), заданные классическими интегральными формулами. Существенным этапом была работа [234] об уравнении Лапласа в C^1-области. Сразу выяснилось, что прежде всего нужна теорема об ограниченности сингулярного интегрального оператора на липшицевой поверхности. В работе Кальдерона [212] она была доказана для липшицевой поверхности с малыми липшицевыми постоянными, и возникла важная проблема ее обобщения на произвольные липшицевы поверхности. Она была решена в работе Койфмана, Макинтоша и Мейера [216] для случая уравнений с постоянными коэффициентами. На общий случай ее распространили М. Митреа и М. Тейлор [275].

На основе теоремы из [216] важные результаты для уравнения Лапласа в липшицевой области получил Г. Веркота [326]. Для доказательства разрешимости уравнений на границе он использовал тождества Реллиха в сочетании с аппроксимацией липшицевой границы гладкими границами (см. предложение 9.1.5), для которых разрешимость получается сравнительно легко.

Другие авторы тоже использовали тождества Реллиха, чем определилась общность возможных обобщений. В случае задачи Дирихле удалось справиться с произвольными сильно эллиптическими системами 2-го порядка, имеющими формально самосопряженную главную часть. См. [89]. В случае задачи Неймана — с общим скалярным уравнением, а также с системой Ламе, для которой такие неравенства были специально доказаны [225].

Для уравнения Лапласа—Пуассона и позднее Бельтрами—Лапласа исследовался вопрос о распространении результатов на возможно более широкую область точек (в наших обозначениях) (s,t) в квадрате Q. Задача Дирихле для уравнения Лапласа была рассмотрена в работе [249], затем в [236] и [334], а наиболее общие результаты для уравнения Бельтрами—Лапласа получены в работах Митреа и Тейлора, см. [276]. Использовались очень глубокие результаты, специфические для теории гармонических функций, проведен непростой анализ задач в граничных точках квадрата Q (чего мы не касались), использовались тонкие интерполяционные теоремы. Положительные результаты получены для всех точек шестиугольника в квадрате Q между прямыми $s=t-1/2\pm\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ зависит от области Ω. Получить результаты для всего квадрата Q в общем случае нельзя, указания на наличие подпирающих примеров можно найти, в частности, в [249] и [236]. См. также наш п. 16.6. С другой стороны, в случае границ класса C^1 результаты верны для всего квадрата Q, это выводится из [234].

См. также [238], [254, 255], [310–313], [329].

В наших §§ 11, 12 и 16 по существу излагается альтернативная теория, намного более близкая к классической постановке вариационных задач, которой придерживалось и придерживается большинство авторов. Эта теория восходит к работам Костабеля [72, 217] и книге Маклина [87]. Личный вклад автора в нее содержит, в частности, идею использования разложений Вейля пространства решений (пп. 11.2 и 11.4), теоремы о регулярности решений (пп. 16.3—16.4) и о связи между операторами на границе (п. 12.6), уравнения на границе для смешанных задач (п. 11.4), задач на незамкнутой поверхности (п. 12.8) и общих задач сопряжения (п. 12.10), а также спектральные задачи со спектральным параметром в граничных условиях или условиях сопряжения [102–110, 183]. В отличие от работ [72, 217], бóльшей части книги [87] и книги [79, гл. 5] мы не предполагаем коэффициенты бесконечно гладкими.

6. В [105] рассмотрены задачи Дирихле и Неймана для систем высших порядков, эллиптических по Дуглису—Ниренбергу, в липшицевой области. Сначала граничные условия предполагаются однородными; постановку задач мы объяснили в п. 8.2. Сильная эллиптичность влечет коэрцитивность в случае задачи Дирихле [280], в случае задачи Неймана коэрцитивность предполагается, указываются некоторые достаточные для нее условия. Обобщается теорема Саваре (см. п. 16.3) на системы высших порядков с эрмитовой главной частью, и указывается возможность применения теоремы Шнейберга. (Замечание о применимости теоремы Шнейберга к задаче Дирихле для систем высших порядков было сделано раньше в работе [268]. Еще раньше в применении к более специальным уравнениям она использовалась, например, в работах [250], [269] и [275].)

Затем результаты для задачи Дирихле обобщаются на случай неоднородных граничных условий. Предполагается, что есть функция, являющаяся носителем данных Дирихле. Но приходится мириться с тем, что следы ее нормальных производных на липшицевой границе существуют только в пространствах малой гладкости. Однако эта постановка углубляется с использованием понятия *набора Уитни*, введенного в работе Веркоты [327]. См. также [176] и [182]. Остановимся на этом понятии.

Будем предполагать, что q — целое неотрицательное число и $\sigma \in \in (q, q+1)$.

Пусть сначала $u(x)$ — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим набор $\dot{w}(x) = \{w_\alpha(x)\}$ следов $w_\alpha(x)$ на Γ всевозможных производных $\partial^\alpha u(x)$ порядка $|\alpha| \leqslant q$. Заметим, что они фактически принадлежат $H_p^1(\Gamma)$, так как их касательные производные принадлежат $L_p(\Gamma)$, и что выполнены следующие *условия согласованности*: для всех возможных значений индексов

$$[\nu_j(x)\partial_k - \nu_k(x)\partial_j] w_\alpha(x) = \nu_j(x) w_{\alpha+e_k}(x) - \nu_k(x) w_{\alpha+e_j}(x) \quad (18.4.13)$$

при $|\alpha| \leqslant q-1$, где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — единичная внешняя нормаль и e_k — мультииндекс из нулей и единиц с единицей только на k-м месте. Это следует из того, что слева и справа записаны следы одних и тех же производных. Такие наборы назовем гладкими.

Обозначим через $\Pi_p^\sigma(\Gamma)$ пространство наборов $\dot{w} = \{w_\alpha\}_{|\alpha|\leqslant q}$ функций $w_\alpha(x)$ на Γ, принадлежащих $H_p^1(\Gamma)$ при $|\alpha| < q$ и $B_p^{\sigma-q}(\Gamma)$ при $|\alpha| = q$. Введем в $\Pi_p^\sigma(\Gamma)$ норму

$$\|\dot{w}\|_{\Pi_p^\sigma(\Gamma)} = \sum_{|\alpha|<q} \|w_\alpha\|_{H_p^1(\Gamma)} + \sum_{|\alpha|=q} \|w_\alpha\|_{B_p^{\sigma-q}(\Gamma)}. \tag{18.4.14}$$

Это, конечно, банахово пространство.

Гладкие наборы образуют линеал в $\Pi_p^\sigma(\Gamma)$. Замыкание этого линеала обозначим через $\mathrm{WA}_p^\sigma(\Gamma)$, а элементы $\dot{w}$ этого замыкания назовем *наборами Уитни порядка* (σ, p) *на* Γ. Другое, эквивалентное определение приведено ниже.

Пусть теперь $u(x)$ — функция из $H_p^{\sigma+1/p}(\Omega)$. Тогда можно образовать набор $\{\partial^\alpha u(x)\}$ из значений ее производных порядка $|\alpha| \leqslant q$ на Γ, тоже имеющий конечную норму (18.4.14). Утверждается, что это набор Уитни. Действительно, функцию $u(x)$ можно продолжить до функции из $H_p^{\sigma+1/p}(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем [294] и там аппроксимировать бесконечно гладкими финитными функциями $u_k(x)$ в норме этого пространства. Тогда наборы Уитни $\{\partial^\alpha u_k(x)\}$ будут сходиться к набору $\{\partial^\alpha u(x)\}$ в пространстве $\Pi_p^\sigma(\Gamma)$. Предельным переходом получаются условия согласованности (18.4.13).

Приведем теорему, известную специалистам; в общем случае она проверена в [182] с использованием результатов из книги [80] и работы [268].

Теорема 18.4.1. *Пусть* $\dot{w} = \{w_\alpha\} \in \Pi_p^\sigma(\Gamma)$, $q < \sigma < q + 1$, *и для* w_α *выполнены условия согласованности* (18.4.13). *Тогда существует такая функция* $u \in H_p^{\sigma+1/p}(\Omega)$, *что следы ее производных* $\partial^\alpha u(x)|_\Gamma$ *образуют набор* $\dot{w}$. *Оператор* $E_q : \dot{w} \to u$ *линеен, ограничен в указанных пространствах и зависит только от* q.

Из этой теоремы вытекает, что данное выше определение пространства $\mathrm{WA}_p^\sigma(\Gamma)$ равносильно следующему: это подпространство в $\Pi_p^\sigma(\Gamma)$, состоящее из наборов $\dot{w} = \{w_\alpha\}$, которые удовлетворяют условиям согласованности.

Сказанное позволяет считать, что в задаче Дирихле с неоднородными граничными условиями задается набор Уитни $\dot{w}(x)$, который должен быть набором из значений производных решения на границе. По нему строится функция u_0, для которой этот набор является набором из значений ее производных на границе. Затем уже решается задача Дирихле с однородными граничными условиями для $u - u_0$.

Наиболее простое и интересное для приложений из уравнений высших порядков — бигармоническое уравнение $\Delta^2 u = f$.

Имеется много работ по эллиптическим уравнениям высших порядков, в том числе в рамках программы Кальдерона; кроме упомянутых выше, можно указать, в частности, работы [223], [224], [328].

7. Отметим еще, что в ряде работ успешно изучались задачи для общего уравнения 2-го порядка, в том числе смешанные, в пространствах H_p^1 для решений. В нашем квадрате Q это диагональ $s+t=1/2$. См., например, [241], [243] и приведенные там ссылки.

К пп. 11.10, 13.9 и 16.7.

Этот материал был включен в книгу накануне ее передачи в типографию. Автор продумывал и обсуждал его вместе с А. М. Селицким, и новые результаты были получены совместно. Наша с ним статья будет опубликована предположительно в журнале «Функциональный анализ и его приложения» (2013, т. 47, вып. 2).

Как мы уже упоминали, исследованию проблемы Като посвящена обширная литература. Давно были получены полные результаты для задач Дирихле и Неймана в липшицевых областях и некоторых других задач, см., например, [267], [245], [195] и приведенные там ссылки. Важные результаты принадлежат Аушеру—Чамитчану, Макинтошу и другим математикам. Наша литература содержит только несколько работ этого направления; но в них можно найти дальнейшие ссылки.

Терминология в этих работах как правило расходится с нашей, но объясняется, так что эти расхождения не затруднят читателя.

Главное внимание в этих работах уделялось оператору A_2, хотя оператор A_1 был известен, как и эквивалентности утверждений относительно этих операторов, упомянутые в п. 16.7. В нашем же подходе очень существенно используются возможность одновременного рассмотрения этих операторов и некоторые специфические свойства решений уравнения $A_1 u = f$. При помощи оператора A_1 решается проблема Като для оператора A_2, что, в свою очередь, влечет нужные результаты для оператора A_1. По-видимому этот подход заслуживает внимания благодаря простоте и единообразию рассмотрений. Результаты для оператора A_1, на наш взгляд, не менее интересны, чем решение проблемы Като для оператора A_2.

В частности, удалось избежать рассмотрений сначала в $\mathbb{R}^n$, полупространстве и неограниченных «специальных» липшицевых областях. Этот путь пройден в [67, 198]. Хотя задачи в $\mathbb{R}^n$ и неограниченных областях или с неограниченными потенциалами содержательны, они не рассмотрены. Но, например, результаты в $\mathbb{R}^n$ для систем с коэффициентами малой гладкости нетрудно получить, отказавшись от предположения о компактности вложений (11.10.3), при надлежащем предположении о сильной коэрцитивности соответствующей формы на H_1.

Также для простоты не преследовалась цель абсолютной минимизации предположений о гладкости коэффициентов системы. В отношении старших коэффициентов достаточно предполагать, что это мультипликаторы в пространствах $H^s(\Omega)$ с малыми $|s|$. «Средние» коэффициенты можно предполагать ограниченными и измеримыми (как и младший коэффициент), по крайней мере, в случаях задач Дирихле, Неймана и смешанной задачи в силу следующих соображений из [322]. Полный оператор, например, в задаче Дирихле является слабым возмущением оператора без средних членов. Получив результаты для последнего, мы пользуемся тем, что средние коэффициенты не влияют на область определения соответствующего оператора A_2 (см. п. 11.10). В силу теоремы 13.9.3 они не влияют на $D(A_2^{1/2})$, так что равенство $D(A_2^{1/2}) = H_1$ сохраняется при добавлении средних членов. Как следствие верно и аналогичное равенство для $D(A_2^{*1/2})$.

Далее, нам не пришлось рассматривать только скалярный оператор $\operatorname{div}(a(x)\nabla)$ или имитировать его структуру (ср. с [322]). В матричном случае нам не пришлось строить сложную факторизацию с использованием оператора типа Дирака (ср. с [197]): по существу нам хватило факторизации (16.7.7). Не потребовала отдельного рассмотрения и простейшая смешанная задача (ср. с [265] и [199]). Наш подход применим и к задачам для систем высших порядков (их предполагается рассмотреть в отдельной заметке), ср. с [196]. А. М. Селицкий предполагает опубликовать работу с приложениями нашего подхода к дифференциально-разностным операторам. Граничные операторы по-видимому в литературе по проблеме Като раньше не обсуждались.

Мы не упоминали H^∞-ограниченное функциональное исчисление (см., в частности, [266], [197]), на самом деле его наличие для A_1 эквивалентно справедливости основных теорем в п. 16.7, см. Арендт [66], и это содержательный факт.

Отметим, что интересны также «бисекториальные операторы», упоминаемые в литературе по проблеме Като, со спектром в двух вертикальных углах с биссектрисой $\mathbb{R}$ раствора меньше π. Сили рассмотрел в гладком случае именно такую ситуацию, пользуясь условиями эллиптичности с параметром [308]. Можно отметить, что, по крайней мере, теорема Лакса—Мильграма допускает применение в этом случае к задачам в липшицевых областях.

Проблема Като рассматривалась и в банаховых пространствах [67], [246]. Возможно, наши результаты удастся распространить на пространства H_p^s $(s=\pm 1, 0)$ с p, близкими к 2.

18.5. К § 17.

К п. 17.1.

Операторы, которые теперь называют фредгольмовыми, раньше часто называли нётеровыми (в честь Ф. Нётера, у которого они появились в начале 20-х гг. XX в. при исследовании одномерных сингулярных интегральных уравнений), при этом фредгольмовыми называли нётеровы операторы с нулевым индексом. Об исследованиях Фредгольма по интегральным уравнениям читатель, конечно, наслышан.

Предметный указатель

Литература

Учебники и монографии

1. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы / Перевод с англ. М.: ИЛ, 1962. (Б-ка сборника «Математика».)
2. *Агранович М. С.* Обобщенные функции. М.: МЦНМО, 2008.
3. *Агранович М. С.* Эллиптические псевдодифференнциальные операторы и спектральные задачи. Начата подготовка к печати.
4. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и ее приложения. Спецкурс. Симферополь: Таврический национальный университет, 2011.
5. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т. I, II. Харьков: Харьковский ун-т, 1977, 1978.
6. *Берг Й., Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение / Перевод с англ. М.: Мир, 1980.
7. *Березанский Ю. М.* Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова Думка, 1965.
8. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. 2-е изд. М.: Наука, 1996.
9. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория операторов в гильбертовом пространстве. 2-е изд. СПб., М., Краснодар: Лань, 2010.
10. *Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З.* Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982.
11. *Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н.* Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977. С добавлением М. С. Аграновича «Спектральные свойства задач дифракции». С. 289—416.
12. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Обобщенные функции и уравнения в свертках. М.: Наука, 1994.
13. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Наука, 1958; 2-е изд. М.: Наука, 1959.
14. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Перевод с англ. М.: Наука, 1989.
15. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. 2-е изд. М.: Наука, 1966.

16. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
17. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. I. Общая теория. Т. II. Спектральная теория / Перевод с англ. М.: ИЛ, 1962, 1966.
18. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. 2-е изд. М.: Наука, 1986.
19. *Егоров Ю. В.* Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы. М.: изд-во Московского ун-та, 1985.
20. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2 / Перевод с англ. М.: Мир, 1965.
21. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 1, 2. 5-е изд., М.: МЦНМО, 2007.
22. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов / Перевод с англ. М.: Мир, 1972.
23. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. Книга неоднократно переиздавалась.
24. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
25. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
26. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.
27. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
28. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. 2-е изд. М.: Наука, 1973.
29. *Лебедев В. И., Агошков В. И.* Операторы Пуанкаре—Стеклова и их приложения в анализе. М.: Отдел вычислительной математики АН СССР, 1983.
30. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения / Перевод с франц. М.: Мир, 1971.
31. *Лопатинский Я. Б.* Теория общих граничных задач. Избранные труды. Киев: Наукова Думка, 1984.
32. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. Книга неоднократно переиздавалась.
33. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. Л.: изд-во Ленинградского ун-та, 1985.
34. *Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.* Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций. Л.: изд-во Ленинградского ун-та, 1986.

35. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинев: Штиинца, 1986.
36. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа / Перевод с итал. М.: ИЛ, 1957.
37. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
38. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
39. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. 2-е изд. М: Физматлит, 1962.
40. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.
41. *Натрошвили Д. Г.* Исследование краевых и начально-краевых задач математической теории упругости и термоупругости для однородных анизотропных сред методом потенциала. Докторская дисс. Тбилиси, 1984.
42. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. 2-е изд. М.: Наука, 1977.
43. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: МГУ, 1990.
44. *Ремпель Ш., Шульце Б.-В.* Теория индекса эллиптических краевых задач / Перевод с англ. М.: Мир, 1986.
45. *Розенблюм Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А.* Спектральная теория дифференциальных операторов // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фунд. направления. Т. 64. М.: ВИНИТИ, 1989.
46. *Рудин У.* Функциональный анализ / Перевод с англ. М.: Мир, 1975.
47. *Сакс С.* Теория интеграла / Перевод с англ. М.: ИЛ, 1949.
48. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: изд-во Ленинградского ун-та, 1950.
49. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / Перевод с англ. М.: Мир, 1973.
50. *Стеклов В. А.* Общие методы решения основных задач математической физики. Харьков: Харьковское матем. общество, 1901.
51. *Темам Р.* Уравнения Навье—Стокса / Перевод с англ. М.: Мир, 1981.
52. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / Перевод с англ. М.: Мир, 1980.
53. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств / Перевод с англ. М.: Мир, 1986.
54. *Уитни Х.* Геометрическая теория интегрирования / Перевод с англ. М.: Мир, 1960.

55. *Хёрмандер Л.* Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига / Перевод с англ. М.: ИЛ, 1962. (Библиотека сборника «Математика».)
56. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Перевод с англ. М.: Мир, 1965.
57. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1—4 / Перевод с англ. М.: Мир, 1986—1988.
58. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы / Перевод с англ. М.: ИЛ, 1962.
59. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978.
60. *Шубин М. А.* Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2001.
61. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. М.: Наука, 1964.
62. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
63. *Adams R. A.* Sobolev Spaces. Boston: Acad. Press, 1975.
64. *Agmon Sh.* Lectures on Elliptic Boundary Value Problems. Princeton, NJ, etc.: Van Nostrand, 1965.
65. *Agranovich M. S., Katsenelenbaum B. Z., Sivov A. N., Voitovich N. N.* Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory. Berlin etc.: Wiley-VCH, 1999. (Переработанное английское издание книги [11].)
66. *Arendt W.* Semigroups and Evolution Equations: Functional Calculus, Regularity and Kernel Estimates /Handbook of Differential Equations: Evolutionary Differential Equations. Elsevier, 2004.
67. *Ausher P., Tchamitchian Ph.* Square Root Problem for Divergence Operators and Related Topics. Astérisque, Soc. Math. France, V. 249. 1998.
68. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of Operators. Boston: Acad. Press, 1988.
69. *Brudnyi Yu. A., Krugljak N. A.* Interpolation Functors and Interpolation Spaces. V. I. Amsterdam etc.: North-Holland, 1991.
70. *Butzer P. L., Berens H.* Semi-Groups of Operators and Approximation. Berlin etc.: Springer, 1967.
71. *Chen Ya-Zhe, Wu Lan-Cheng*. Second Order Elliptic Equations and Elliptic Systems / Traslations of Math. Monographs. Providence, RI: AMS, 1998.
72. *Costabel M.* Starke Elliptícität von Randintegraloperatoren Erster Art. Habilitationsschrift, Technische Hochschule Darmstadt. Preprint 868, 1984.
73. *Dauge M.* Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains; Smoothness and Asymptotics of Solutions / Lecture Notes in Math. V. 1341. Berlin etc.: Springer, 1988.
74. *Edmunds D. E., Triebel H.* Function Spaces, Entropy Numbers and Differential Operators. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1996.

75. *Fabrikant V. I.* Mixed Boundary Value Problems of Potential Theory and Their Applications in Engineering. Dorderecht: Kluver, 1991.
76. *Grisvard P.* Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. Boston etc.: Pitman, 1985.
77. *Grubb G.* Functional Calculus of Pseudodifferential Boundary Problems. 2 ed. Boston etc.: Birkhäuser, 1996.
78. *Haase M.* The Functional Calculus for Sectorial Operators. Birkhäuser, 2006.
79. *Hsiao G. C.*, *Wendland W. L.* Boundary Integral Equations. Berlin etc.: Springer, 2008.
80. *Jonsson A.*, *Wallin H.* Function Spaces on Subsets of $\mathbb{R}^n$ // Math. Rep. Ser. 2, No. 1. Harwood Academic Publ., 1984.
81. *Kenig C. E.* Harmonic Analysis Techniques for Second Order Elliptic Boundary Value Problems. Providence, RI: AMS, 1994.
82. *Kozlov V. A.*, *Maz'ya V. G.*, *Rossman J.* Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities. Providence, RI: AMS, 1997.
83. *Kozlov V. A.*, *Maz'ya V. G.*, *Rossman J.* Spectral Problems Associated with Corner Singularities of Solutions to Elliptic Equations. Providence, RI: AMS, 2001.
84. *Lions J. L.* Équations différentielles opérationelles et problèmes aux limites. Berlin etc.: Springer, 1961.
85. *Lunardi A.* Interpolation Theory / Publications of the Scuola Normale Superiore. Lecture Notes. 2nd ed. 2009.
86. *Maz'ya V.*, *Rossmann J.* Elliptic Equations in Polyhedral Domains. Providence, RI: AMS, 2010.
87. *McLean W.* Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2000.
88. *Miranda C.* Partial Differential Equations of Elliptic Type. Second revised ed. Berlin etc.: Springer, 1970.
89. *Mitrea D.*, *Mitrea M.*, *Taylor M.* Layer Potentials, the Hodge Laplacian, and Global Boundary Value Problems in Nonsmooth Riemannian Manifolds // Memoirs of AMS, 2001. V. 150, No. 713.
90. *Nazarov S. A.*, *Plamenevsky B. A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994. Дополненный перевод книги [40].
91. *Nečhas J.* Les méthodes directes en théorie des eq́uations elliptiques. Paris: Masson, 1967. Английское переработанное издание: Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations. Heidelberg etc.: Springer, 2012.
92. *Papageorgiou N. S.*, *Kyritsi-Yiallourou S. Th.* Handbook of Applied Analysis. Berlin etc.: Springer, 2009.
93. *Peetre J.* New Thoughts on Besov Spaces. Durham, NC: Duke Univ., 1976.

94. *Roitberg Ya.* Elliptic Boundary Value Problems in the Spaces of Distributions. Dordrecht: Kluwer, 1996.
95. *Runst T., Sickel W.* Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytski Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations. Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1996.
96. *Sneddon I. N.* Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory. N. Y.: Elsevier, 1966.
97. *Stephan E.* Boundary Integral Equations for Mixed Boundary Value Problems, Screen and Transmission Problems in $\mathbb{R}^3$. Habilitationsschrift, Technische Hochschule Darmstadt. Preprint 848, 1984.
98. *Triebel H.* Theory of Function Spaces II. Basel etc.: Birkhäuser Verlag, 1992.
99. *Verchota G.* Layer Potentials and Boundary Value Problems for Laplace's Equation in Lipschitz Domains. PhD thesis, Univ. of Minnesota. Ann Arbor, MI, USA, 1982.

Журнальные статьи и статьи в книгах

100. *Агранович М. С.* Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы // УМН. 1965. Т. 20, вып. 5. С. 3—120.
101. *Агранович М. С.* Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фунд. направления. Т. 63. М.: ВИНИТИ, 1990. С. 5—129.
102. *Агранович М. С.* Спектральные свойства операторов типа потенциала для некоторого класса сильно эллиптических систем на гладких и липшицевых поверхностях // Труды ММО. 2001. Т. 62. С. 5—55.
103. *Агранович М. С.* Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей // УМН. 2002. Т. 57, вып. 5. С. 3—78.
104. *Агранович М. С.* Регулярность вариационных решений линейных граничных задач в липшицевых областях // Функц. анализ и его прил. 2006. Т. 40, вып. 4. С. 83—103.
105. *Агранович М. С.* К теории задач Дирихле и Неймана для линейных сильно эллиптических систем в липшицевых областях // Функц. анализ и его прил. 2007. Т. 41, вып. 4. С. 1—21.
106. *Агранович М. С.* Спектральные задачи в липшицевых областях для сильно эллиптических систем в банаховых пространствах H_p^s и B_p^s // Функц. анализ и его прил. 2008. Т. 42, вып. 4. С. 2—23.
107. *Агранович М. С.* Операторы типа потенциала и задачи сопряжения для сильно эллиптических систем 2-го порядка в областях с липшицевой границей // Функц. анализ и его прил. 2009. Т. 43, вып. 3. С. 3—25.

108. *Агранович М. С.* Сильно эллиптические системы 2-го порядка с граничными условиями на незамкнутой липшицевой поверхности // Функц. анализ и его прил. 2011. Т. 45, вып. 1. С. 1—15.

109. *Агранович М. С.* Смешанные задачи в липшицевой области для сильно эллиптических систем 2-го порядка // Функц. анализ и его прил. 2011. Т. 45, вып. 2. С. 1—22.

110. *Агранович М. С.* Спектральные задачи в липшицевых областях // Современная математика. Фунд. направления. РУДН, 2011. Т. 39. С. 5—29.

111. *Агранович М. С., Амосов Б. А.* Оценки s-чисел и спектральные асимптотики для интегральных операторов типа потенциала на негладких поверхностях // Функц. анализ и его прил. 1996. Т. 30, вып. 2. С. 1—18.

112. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // УМН. 1964. Т. 19, вып. 3. С. 53—161.

113. *Агранович М. С., Волевич Л. Р., Дынин А. С.* Разрешимость общих граничных задач для эллиптических систем в многомерных областях // Материалы Советско-американского симпозиума по уравнениям с частными производными. Новосибирск, 1963.

114. *Агранович М. С., Дынин А. С.* Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области // ДАН СССР. 1962. Т. 146, вып. 3. С. 511—514.

115. *Агранович М. С., Менникен Р.* Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности // Матем. сборн. 1999. Т. 190, вып. 1. С. 29—68.

116. *Бабич В. М.* К вопросу о распространении функций // УМН. 1953. Т. 8, вып. 2. С. 111—113.

117. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений // ДАН СССР. 1963. Т. 148, вып. 4. С. 745—748.

118. *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // ДАН СССР. 1959. Т. 126, вып. 6. С. 1163—1165.

119. *Бесов О. В.* Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Труды МИАН им. Стеклова. 1961. Т. 60. С. 42—81.

120. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 14. М.: ВИНИТИ, 1977. С. 5—58.

121. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* L_2-теория оператора Максвелла в произвольных областях // УМН. 1987. Т. 42, вып. 6. С. 61—76.

122. *Бицадзе А. В.* О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // УМН. 1948. Т. 3, вып. 6(28). С. 241—242.

123. *Брудный Ю. А., Крейн С. Г., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов // Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 24. М.: ВИНИТИ, 1986. С. 3—163.

124. *Вайнберг Б. Р.* Принципы излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды в общей теории уравнений с частными производными // УМН. 1966. Т. 21, вып. 3. С. 115—194.

125. *Вейль Г.* Метод ортогональной проекции в теории потенциала // Duke Math. J. 1940. V. 7. P. 414—444. / Перевод с англ. в кн. *Вейль Г.* Избранные труды. Математика. Теоретическая физика. Наука, 1984. С. 275—307.

126. *Вишик М. И.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сборн. 1951. Т. 29 (71). С. 615—676.

127. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Труды ММО. 1952. Т. 1. С. 187—246.

128. *Вишик М. И., Грушин В. В.* Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы // УМН. 1970. Т. 25, вып. 4. С. 29—56.

129. *Вишик М. И., Мышкис А. Д., Олейник О. А.* Дифференциальные уравнения с частными производными // Математика в СССР за 40 лет. Т. I. М.: Физматгиз, 1959. С. 563—636.

130. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д., Старков П. А.* Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи // Современная математика. Фунд. направления. РУДН, 2009. Т. 34. С. 5—44.

131. *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Матем. сборн. 1965. Т. 68(110), вып. 3. С. 373—416.

132. *Вольперт А. И.* Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости // Труды ММО. 1961. Т. 10. С. 41—87.

133. *Гельфанд И. М.* Об эллиптических уравнениях // УМН. 1960. Т. 15, вып. 3. С. 121—132.

134. *Диканский А. С.* Сопряженные краевые задачи к эллиптическим дифференциальным и псевдодифференциальным краевым задачам в ограниченной области // Матем. сборн. 1973. Т. 91, вып. 1. С. 62—77.

135. *Дмитриев В. И., Крейн С. Г., Овчинников В. И.* Основы теории интерполяции линейных операторов // Геометрия линейных пространств и теория операторов. Ярославль, 1977. С. 31—74.

136. *Дудучава Р. В., Натрошвили Д. Г., Шаргородский Е. М.* Граничные задачи математической теории трещин // Труды Института прикладной математики им. Векуа Тбилисского унив. 1990. Т. 39. С. 68—84.
137. *Дынин А. С.* Сингулярные операторы произвольного порядка на многообразии // ДАН СССР. 1961. Т. 141, вып. 1. С. 21—23.
138. *Дынин А. С.* Многомерные эллиптические задачи с одной неизвестной функцией // ДАН СССР. 1961. Т. 141, вып. 2. С. 285—287.
139. *Дынин А. С.* Фредгольмовы эллиптические операторы на многообразиях // УМН. 1962. Т. 17, вып. 2. С. 194—195.
140. *Кальдерон А. П.* Граничные задачи для эллиптических уравнений / Перевод с англ. // Материалы Советско-американского симпозиума по уравнениям с частными производными. Новосибирск, 1963.
141. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды ММО. 1967. Т. 16. С. 209—292.
142. *Кондрашов В. И.* О некоторых свойствах функций пространства L_p // ДАН СССР. 1945. Т. 48. С. 563—566.
143. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и некоторых ее приложениях // Спектральные и эволюционные задачи. Сб. трудов XXI Крымской осенней математической школы-симпозиума. Симферополь. Таврический нац. университет им. Вернадского. 2011. Т. 21. С. 3—39.
144. *Левендорский С. З., Панеях Б. П.* Вырождающиеся эллиптические уравнения и краевые задачи // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фунд. направления. Т. 63. М.: ВИНИТИ, 1990. С. 131—200.
145. *Лизоркин П. И.* (L_p, L_q)-мультипликаторы интегралов Фурье // ДАН СССР. 1963. Т. 152, вып. 4. С. 808—811.
146. *Лизоркин П. И.* Операторы, связанные с дробным дифференцированием, и классы дифференцируемых функций // Труды МИАН им. Стеклова. 1972. Т. 117. С. 212—243.
147. *Лизоркин П. И.* Свойства функций из пространств $\Lambda^r_{p\theta}$ // Труды МИАН им. Стеклова. 1974. Т. 131. С. 158—181.
148. *Лопатинский Я. Б.* Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным эллиптическим уравнениям // Укр. матем. журн. 1953. Т. 5. С. 123—151.
149. *Лопатинский Я. Б.* Разложение полиномиальной матрицы на множители // Научные записки Львовского политехн. института. 1956. Т. 38, вып. 2. С. 3—7.
150. *Львин С. Я.* Формула Грина и разрешимость эллиптических задач с граничными условиями любого порядка // Труды НИИ математики ВГУ. Вып. XVII. Воронеж, 1975. С. 49—56.

151. *Мазья В. Г.* Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фунд. направления. Т. 27. М.: ВИНИТИ, 1988, С. 131—228.

152. *Михлин С. Г.* О мультипликаторах интегралов Фурье // ДАН СССР. 1956. Т. 109. С. 701—703.

153. *Натрошвили Д. Г., Чкадуа О. О., Шаргородский Е. М.* Смешанные задачи для однородных анизотропных упругих сред // Труды Института прикладной математики им. Векуа Тбилисского унив. 1990. Т. 39. С. 133—178.

154. *Нечас И.* Об областях типа $\mathfrak{N}$ // Чехослов. матем. ж. 1962. Т. 12 (87). С. 274—287.

155. *Никольский С. М.* О теоремах вложения, продолжения и приближения дифференцируемых функций многих переменных // УМН. 1961. Т. 16, вып. 5. С. 63—114.

156. *Пальцев Б. В.* О смешанной задаче с неоднородными граничными условиями для эллиптических с параметром уравнений второго порядка в липшицевых областях // Матем. сборн. 1996. Т. 187, вып. 4. С. 59—116.

157. *Петровский И. Г.* О системах дифференциальных уравнений, все решения которых аналитичны // ДАН СССР. 1937. Т. 17. С. 339—342.

158. *Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // ДАН СССР. 1963. Т. 148, вып. 5. С. 1034—1037.

159. *Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Формула Грина и теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем // УМН. 1967. Т. 22, вып. 5. С. 181—182.

160. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Ученые записки ЛГПИ им. Герцена. 1958. Т. 197. С. 54—112.

161. *Слободецкий Л. Н.* Оценки в L_p эллиптических систем // ДАН СССР. 1958. Т. 123, вып. 4. С. 616—619.

162. *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле Даглиса—Ниренберга. I // Изв. АН СССР. 1964. Т. 28, вып. 3. С. 665—706.

163. *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле Даглиса—Ниренберга. II // Труды МИАН им. Стеклова. 1966. Т. 92. С. 233—297.

164. *Солонников В. А.* Об оценках в L_p решений эллиптических и параболических систем // Труды МИАН им. Стеклова. 1967. Т. 102. С. 137—160.

165. *Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Пространства Соболева // Избранные главы анализа и высшей алгебры. Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1981. С. 129—197.
166. *Стернин Б. Ю.* Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности // Труды ММО. 1966. Т. 15. С. 346—382.
167. *Хёрмандер Л.* Спектральная функция эллиптического оператора / Перевод с англ. // Сб. переводов «Математика». 1969. Т. 13, вып. 6. С. 114—137.
168. *Шапиро З. Я.* Первая краевая задача для эллиптической системы дифференциальных уравнений // Матем. сб. 1951. Т. 28. С. 55—78.
169. *Шапиро З. Я.* Об общих краевых задачах для уравнений эллиптического типа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1953. Т. 17. С. 539—562.
170. *Шефтель З. Г.* Общая теория граничных задач для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // Укр. матем. ж. 1966. Т. 18, вып. 3. С. 132—136.
171. *Шнейберг И. Я.* Спектральные свойства линейных операторов в интерполяционных семействах банаховых пространств // Матем. исслед. 1974. Т. 9, вып. 2. С. 214—227.
172. *Эйдельман С. Д.* Параболические уравнения // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фунд. направления. Т. 63. М.: ВИНИТИ, 1990. С. 201—313.
173. *Яковлев Г. Н.* О следах функций из пространств W_p^l на кусочно-гладких поверхностях // Матем. сборн. 1967. Т. 74, вып. 4. С. 526—543.
174. *Adams R. D., Aronszajn N., Hanna M. S.* Theory of Bessel potentials. Part III. Potentials on regular manifolds // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1969/70. V. 19, No. 2. P. 279—338.
175. *Adams R. A., Aronszajn N., Smith K. T.* Theory of Bessel potentials. II // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1967/68. V. 17. P. 1—135.
176. *Adolfsson V., Pipher J.* The inhomogeneous Dirichlet problem for Δ^2 // J. Funct. Anal. 1998. V. 159. P. 137—190.
177. *Agmon Sh.* The coerciveness problem for integro-differential forms // J. d'Analyse Math. 1958. V. 6. P. 183—223.
178. *Agmon Sh.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Comm. Pure Appl. Math. 1962. V. 15. P. 119—147.
179. *Agmon Sh., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II // Comm. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. P. 35—92.
180. *Agmon Sh., Nirenberg L.* Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space // Comm. Pure Appl. Math. 1963. V. 16, No. 2. P. 121—239.

181. *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encyclopaedia of Math. Sciences. V. 79. Berlin etc.: Springer, 1997. P. 1—144.
182. *Agranovich M. S.* Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary // Russian J. Math. Phys. 2008. V. 15, No. 2. P. 146—155.
183. *Agranovich M. S.* Remarks on strongly elliptic second-order systems in Lipschitz domains // Russian J. Math. Phys. 2012. V. 20, No. 4. P. 5—16.
184. *Agranovich M. S., Amosov B. A., Levitin M.* Spectral problems for the Lamé system with spectral parameter in boundary conditions on smooth or non-smooth boundary // Russian J. Math. Phys. 1999. V. 6, No. 3. P. 247—281.
185. *Agranovich M., Denk R., Faierman M.* Weakly smooth nonselfadjoint spectral elliptic boundary problems // Spectral Theory, Microlocal Analysis, Singular Manifolds / Ed. by M. Demuth, E. Schrohe, B.-W. Schulze, J. Sjöstrand. Berlin: Akademie Verlag, 1997. P. 138—199.
186. *Alvino A., Trombetti G.* Problemi ellitici dipendenti di un parametro in L_p // Ricerche Mat. 1977. V. 26. P. 335—348.
187. *Arendt W., ter Elst A. F. M.* Gaussian estimates for second order elliptic operators with boundary conditions // J. Operator Theory. 1997. V. 38. P. 87—130.
188. *Aronszajn N.* Studies in eigenvalue problems. Boundary values of functions with finite Dirichlet integral // Conference on Partial Differential Equations. University of Kansas, 1954. P. 77—93.
189. *Aronszajn N.* On coercive integro-differential quadratic forms // Conference on Partial Differential Equations. University of Kansas, 1954. P. 94—106.
190. *Aronszajn N., Mulla F., Szeptycki P.* On spaces of potentials connected with L^p classes // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1963. V. 13. P. 211—306.
191. *Aronszajn N., Szeptycki P.* Theory of Bessel potentials. IV. Potentials on subcartesian spaces with singularities of polyhedral type. // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1975. V. 25, No. 3—4. P. 27—69.
192. *Aronszajn N., Milgram A. N.* Differential operators on Riemannian manifolds // Rendiconti Circ. Mat. Palermo. 1953. V. 2, No. 3. P. 266—325.
193. *Aronszajn N., Smith K. T.* Theory of Bessel potentials. I // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1961. V. 11. P. 385—475.
194. *Atiyah M. F., Singer I. M.* The index of elliptic operators on compact manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1963. V. 69. P. 422—433.
195. *Ausher P., Hofmann S., Lacey M., Lewis J., McIntosh A., Tchamitchian P.* The solution of Kato's conjectures // C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1. 2001. V. 332. P. 601—606.
196. *Auscher P., Hofmann S., McIntosch A., Tchamitchian P.* The Kato square root problem for higher order elliptic operators and systems on $\mathbb{R}^n$ // J. Evolution Equations. 2001. V. 1, No. 4. P. 361—385.

197. *Auscher P., McIntosh A., Nahmod A.* Holomorphic functional calculi of operators, quadratic estimates and interpolation // Indiana Univ. Math. J. 1997. V. 46, No. 2. P. 375—403.
198. *Ausher P., Tchamitchian Ph.* Square roots of elliptic second order divergence operators on strongly Lipschitz domains: L^2 theory // J. d'Analyse Math. 2003. V. 90. P. 1—12.
199. *Axelsson A., Keith S., McIntosh A.* The Kato square root problem for mixed boundary value problems // J. London Math. Soc. 2006. V. 74, No. 1. P. 113—130.
200. *Boutet de Monvel L.* Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et problèmes aux limites elliptiques // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1969. V. 19. P. 169—268.
201. *Boutet de Monvel L.* Boundary problems for pseudodifferential operators // Acta Math. 1971. V. 126. P. 11—51.
202. *Boyd D. V.* The spectrum of a Cesaro operator // Acta Sci. Math. (Szeged). 1968. V. 29. P. 31—34.
203. *Browder F.* On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1956. V. 9. P. 351—361.
204. *Browder F.* Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1959. V. 45, No. 3. P. 365—372.
205. *Browder F.* A priori estimates for solutions of elliptic boundary value problems. I, II // Koninkl. Nederl. Akad. Wetenshap. 1960. V. 22. P. 145—159, 160—169; III // Indag. Math. 1961. V. 23. P. 404—410.
206. *Browder F.* A continuity property for adjoints of closed operators in Banach spaces and its applications to elliptic boundary value problems // Duke Math. J. 1961. V. 28, No. 2. P. 157—182.
207. *Brown R. M.* The mixed problem for Laplace's equation in a class of Lipschitz domains // Comm. Partial Differential Equations. 1994. V. 19, No. 7—8. P. 1217—1233.
208. *Burak T.* On spectral projections of elliptic operators // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3). 1970. V. 24. P. 209—230.
209. *Burgoyne J.* Denseness of the generalized eigenvectors of a discrete operator in Banach space // J. Operator Theory. 1995. V. 33. P. 279—297.
210. *Calderón A.* Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions // Proc. Sympos. Pure Math. V. 4. Providence, RI: AMS. 1961. P. 33—49.
211. *Calderón A.* Intermediate spaces and interpolation, the complex method // Studia Math. 1964. V. 24. P. 113—190.
212. *Calderón A.* Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1977. V. 74. P. 1324—1327.
213. *Calderón A.* Boundary value problems for the Laplace equation in Lipschitz domains // Recent Progress in Fourier Analysis. North Holland Math. St. V. 111. 1983. P. 33—49.

214. *Calderón A., Zygmund A.* On the existence of certain singular integrals // Acta Math. 1952. V. 88. P. 85—139.
215. *Cao W., Sager Y.* Stability of Fredholm properties on interpolation spaces // Arkiv för Math. 1990. V. 28, No. 2. P. 249—258.
216. *Coifman R., McIntosh A., Meyer Y.* L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes Lipschitziennes // Ann. Math. 1982. V. 116. P. 361—388.
217. *Costabel M.* Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results // SIAM J. Math. Anal. 1988. V. 19, No 3. P. 613—626.
218. *Costabel M.* A coercive bilinear form for Maxwell's equations // J. Math. Anal. Appl. 1991. V. 157. P. 527—541.
219. *Costabel M., Dauge M.* On representation formulas and radiation conditions // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20. P. 133—150.
220. *Costabel M., Stephan E.* A direct boundary integral equation method for transmission problems // J. Math. Anal. Appl. 1985. V. 106. P. 367—413.
221. *Costabel M., Wendland W. L.* Strong ellipticity of boundary integral operators // J. Reine Angew. Math. 1986. V. 372. P. 34—63.
222. *Cwickel M.* Real and complex interpolation and extrapolation of compact operators // Duke Math. J. 1992. V. 65, No. 2. P. 503—538.
223. *Dahlberg B., Kenig C., Pipher J., Verchota G.* Area integral estimates for higher order elliptic equations and systems // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1997. V. 47, No. 5. P. 1425—1461.
224. *Dahlberg B., Kenig C., Verchota G.* The Dirichlet problem for the biharmonic equation in a Lipschitz domain // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1986. V. 36, No. 3. P. 109—135.
225. *Dahlberg B., Kenig C., Verchota G.* Boundary value problems for the system of elastostatics in Lipschitz domains // Duke Math. J. 1988. V. 57. P. 795—818.
226. *Denk R., Mennicken R., Volevich L.* The Newton polygon and elliptic problems with parameter // Math. Nachr. 1998. V. 192. P. 125—157.
227. *Denk R., Volevich L.* Elliptic boundary value problems with large parameter for mixed order systems // Partial differential equations. Providence, RI: AMS, 2002. (Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2; V. 206.) P. 29—64.
228. *Denk R., Volevich L.* Parameter-elliptic boundary value problems connected with the Newton polygon // Differential Integral Equations. 2002. V. 15, No. 3. P. 289—326.
229. *Douglis A., Nirenberg L.* Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1955. V. 8. P. 503—538.
230. *Duduchava R.* The Green formula and layer potentials // Integral Equations Operator Theory. 2001. V. 41, No. 2. P. 127—178.
231. *Duduchava R., Natroshvili D.* Mixed crack type problem in anisotropic elasticity // Math. Nachr. 1998. V. 191. P. 83—107.

232. *Duduchava R., Wendland W. L.* The Wiener—Hopf method for systems of pseudodifferential equations with an application to crack problems // Integral Equations Operator Theory. 1995. V. 23. P. 294—335.
233. *Fabes E., Jodeit M., Lewis J.* Double layer potentials for domains with corners and edges // Indiana Univ. Math. J. 1977. V. 26. P. 95—114.
234. *Fabes E., Jodeit M. Jr., Riviére N.* Potential techniques for boundary value problems on C^1 domains // Acta Math. 1978. V. 141. P. 165—186.
235. *Fabes E., Kenig C., Verchota G.* The Dirichlet problem for the Stokes system on Lipschitz domains // Duke Math. J. 1988. V. 57, No. 3. P. 769—793.
236. *Fabes E., Mendez O., Mitrea M.* Boundary layers on Sobolev—Besov spaces and Poisson's equation for the Laplacian in Lipschitz domains // J. Funct. Anal. 1998. V. 159, No 2. P. 323—368.
237. *Franke J., Runst T.* Regular elliptic boundary value problems in Besov—Triebel—Lizorkin spaces // Math. Nachr. 1995. V. 174. P. 113—149.
238. *Gao W.* Layer potentials and boundary value problems for elliptic systems in Lipschitz domains // J. Funct. Anal. 1991. V. 95, No. 2. P. 377—399.
239. *Gårding L.* Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations // Math. Scand. 1953. V. 1. P. 55—72.
240. *Geymonat G., Grisvard P.* Alcuni risultati di teoria spettrale per i problemi al limiti lineari ellittici // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1967. V. 38. P. 121—173.
241. *Grippentrog J., Kaiser H.-C., Rehberg J.* Heat kernel and resolvent properties for second order elliptic differential operators with general boundary conditions on L_p // Advances Math. Sci. Appl. 2001. V. 11, No. 1. P. 87—112.
242. *Grisvard D.* Caractérisation de quelques espaces d'interpolation // Arc. Rat. Mech. Anal. 1967. V. 25. P. 40—63.
243. *Haller-Dintelmann R., Kaiser H.-C., Rehberg J.* Elliptic model problems including mixed boundary conditions and material heterogeneities // J. Math. Pures Appl. 2008. V. 89. P. 25—48.
244. *Hestenes M. R.* Extension of the range of a differentiable function // Duke Math. J. 1941. V. 8. P. 183—192.
245. *Hoffmann S.* A short course on the Kato problem // Contemp. Math. AMS, 2001. V. 289. P. 61—67.
246. *Hytönen T., McIntosh A., Portal P.* Kato's square root problem in Banach spaces // J. Funct. Anal. 2008. V. 254, No. 3. P. 675—726.
247. *Janson S., Nilsson P., Peetre J.* Notes on Wolff's note on interpolation spaces // Proc. London Math. Soc. 1984. V. 48. P. 283—299.
248. *Jerison D., Kenig C.* Boundary value problems on Lipschitz domains // MAA Studies in Math. 1982. V. 23. P. 1—68.
249. *Jerison D., Kenig C.* The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains // J. Funct. Anal. 1995. V. 130. P. 164—219.

250. *Kalton N., Mitrea M.* Stability results on interpolation scales of quasi-Banach spaces and applications // Trans. Amer. Math. Soc. 1998. V. 350. P. 3903—3922.
251. *Kato T.* Fractional powers of dissipative operators // J. Math. Soc. Japan. 1961. V. 13, No. 3. P. 246—274.
252. *Kato T.* A generalization of the Heinz inequality // Proc. Japan Acad. 1961. V. 37, No. 6. P. 305—308.
253. *Kato T.* Fractional powers of dissipative operators. II // J. Math. Soc. Japan. 1962. V. 14, No. 2. P. 242—248.
254. *Kenig C. E., Pipher J.* The oblique derivative problem on Lipschitz domains with L^p data // Amer. J. Math. 1988. V. 110, No. 4. P. 715—738.
255. *Kenig C. E., Pipher J.* The Neumann problem for elliptic equations with non-smooth coefficients // Inventiones Math. 1993. V. 113. P. 447—509; II. Duke Math. J. 1995. V. 81. P. 227—250.
256. *Komatsu H.* Fractional powers of operators // Pacif. J. Math. 1966. V. 19. P. 285—346.
257. *Kozhevnikov A.* Asymptotics of the spectrum of Douglis—Nirenberg elliptic operators on a compact manifold // Math. Nachr. 1886. V. 182. P. 261—293.
258. *Lanzani L., Shen Z.* On the Robin boundary condition for Laplace's equation in Lipschitz domains // Comm. Partial Differential Equations. 2004. V. 29, No. 1—2. P. 91—109.
259. *Lax P. D., Milgram N.* Parabolic equations // Contributions to the Theory of Partial Differential Equations. Princeton, N. J., 1954. (Annals of Math. Studies; V. 33.) P. 167—190.
260. *Lions J. L.* Espaces intermédiares entre espaces hilbertiens et applications // Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P. Roumaine (N.S.). 1958. V. 2 (50). P. 419—432.
261. *Lions J. L.* Théorèmes de trace et d'interpolation. I // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1959. V. 13, No.4. P. 389—403.
262. *Lions J. L.* Une construction d'espaces d'interpolation // C. R. Acad. Sci. Paris. 1960. V. 251, No 3. P. 1853—1863.
263. *Lions J. L.* Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionaires d'opérateurs // J. Math. Soc. Japan. 1962. V. 14, No. 2. P. 233—241.
264. *Lions J. L., Peetre J.* Sur une classe d'espaces d'interpolation // Publs. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1964. V. 19. P. 5—68.
265. *McIntosh A.* Square roots of elliptic operators // J. Funct. Anal. 1985. V. 61. P. 307—327.
266. *McIntosh A.* Operators which have an H^∞ functional calculus. Miniconference on Operator Theory and Partial Differential Equations // Proc. Centre Math. Analysis. Canberra: Austral. Nat. Univ., 1986. V. 14. P. 210—231.
267. *McIntosh A.* The square root problem for elliptic operators. A survey // Lecture Notes in Math. Springer, 1990. V. 1450. P. 122—140.

268. *Maz'ya V., Mitrea M., Shaposhnikova T.* The Dirichlet problem in Lipschitz domains for higher order elliptic systems with rough coefficients // J. d'Analyse Math. 2010. V. 110. P. 167—239.

269. *Mendez O., Mitrea M.* The Banach envelopes of Besov and Triebel—Lizorkin spaces and applications to partial differential equations // J. Fourier Analysis and Appl. 2000. V. 6. P. 503—531.

270. *Métivier G.* Valeurs propres de problèmes aux limites elliptiques irreguliers // Mém. Soc. Math. France. 1977. V. 51—52. P. 125—219.

271. *Mikhailov S. E.* Traces, extensions and co-normal derivatives for elliptic systems on Lipschitz domains // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 378. P. 324—342.

272. *Mikhailov S. E.* Solution regularity and co-normal derivatives for elliptic systems with non-smooth coefficients on Lipschitz domains // J. Math. Analysis and Appl. 2012. DOI:10.1016/j.jmaa.2012.10.045, 1—20. PDF

273. *Mitrea M.* The oblique derivative problem for general elliptic systems in Lipschitz domains // Integral Methods in Science and Engineering, Proceedings of the 5th international conference (Houghton, MI, USA, 1998). Boka Raton, FL. 2000. (Chapman Hall Res. Notes Math.; V. 418.) P. 240—245.

274. *Mitrea I., Mitrea M.* The Poisson problem with mixed boundary conditions in Sobolev and Besov spaces in non-smooth domains // Trans. Amer. Math. Soc. 2007. V. 359. P. 4113—4182.

275. *Mitrea M., Taylor M.* Boundary layer methods for Lipschitz domains in Riemannian manifolds // J. Funct. Anal. 1999. V. 163. P. 181—251.

276. *Mitrea M., Taylor M.* Potential theory on Lipschitz domains in Riemannian manifolds: Sobolev—Besov space results and the Poisson problem // J. Funct. Anal. 2000. V. 176, No. 1. P. 1—79.

277. *Mitrea M., Torres R., Welland G.* Regularity and approximation results for the Maxwell problem on C^1 and Lipschitz domains // Clifford Algebras in Analysis and Related Topics. Boca Raton: CRC Press, 1995. P. 297—308.

278. *Natroshvili D.* Boundary integral equation method in the steady state oscillation problems for anisotropic bodies // Math. Methods Applied Sciences. 1997. V. 20. P. 95—119.

279. *Netrusov Yu., Safarov Yu.* Weyl asymptotic formula for the Laplacian on domains with rough boundaries // Comm. Math. Phys. 2005. V. 253. P. 481—509.

280. *Nirenberg L.* Remarks on strongly elliptic partial differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1965. V. 8. P. 649—675.

281. *Peetre J.* A theory of interpolation of normed spaces // Notes de Matematica. No. 39. Rio de Janeiro, 1968. P. 1—88.

282. *Peetre J.* Remarques sur les spaces de Besov. Le cas $0 < p < 1$ // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A-B. 1973. V. 277. P. 947—950.

283. *Peetre J.* On spaces of Triebel—Lizorkin type // Ark. Mat. 1975. V. 13. P. 123—130.
284. *von Petersdorff T.* Boundary integral equations for mixed Dirichlet, Neumann and transmission problems // Math. Methods Appl. Sci. 1989. V. 11, No. 2. P. 183—213.
285. *Payne L. E., Weinberger H. F.* New bounds for solutions of second order elliptic partial differential equations // Pacific J. Math. 1958. V. 8. P. 551—573.
286. *Pipher J.* Oblique derivative problems for the Laplacian in Lipschitz domains // Revista Math. Iberoamericana. 1987. V. 3. P. 455—472.
287. *Poincaré H.* La méthode de Neumann et le probléme de Dirichlet // Acta Math. 1886—1987. V. 20. P. 59—142.
288. *Rademacher H.* Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrer Variabeln und über die Transformation der Doppelintegrale // Math. Ann. 1919. V. 79. P. 340—359.
289. *Ransford T. J.* The spectrum of an interpolated operator and analytic multivalued functions // Pacific J. Math. 1986. V. 121, No. 2. P. 445—466.
290. *Rellich F.* Ein Satz über mittlere Convegenz // Göttingen Nachr. 1930. P. 30—35.
291. *Rellich F.* Darstellung der Eigenverte von $\Delta u + \lambda u = 0$ durch ein Randintegral // Math. Z. 1940. V. 46. P. 635—636.
292. *Rozenblum G., Tashchiyan G.* Eigenvalue asymptotics for potential type operators on Lipschitz surfaces // Russian J. Math. Phys. 2006. V. 13, No. 3. P. 326—339.
293. *Rychkov V. S.* Intrinsic characterizations of distribution spaces on domains // Studia Math. 1998. V. 127. P. 277—298.
294. *Rychkov V. S.* On restrictions and extensions of the Besov and Triebel—Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains // J. London Math. Soc. 1999. V. 60. P. 237—257.
295. *Savaré G.* Regularity and perturbation results for mixed second order elliptic problems // Comm. Partial Differential Equations. 1997. V. 22, No. 5—6. P. 869—899.
296. *Savaré G.* Regularity results for elliptic equations in Lipschitz domains // J. Funct. Anal. 1998. V. 152. P. 176—201.
297. *Schauder J.* Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung // Math. Z. 1934. V. 38. P. 257—282.
298. *Schauder J.* Numerische Abschätzungen in elliptischen linearen Differentialgleichungen // Studia Math. 1934. V. 5. P. 34—42.
299. *Schechter M.* Coerciveness of linear partial differential operators for functions satisfying zero Dirichlet type boundary data // Comm. Pure Appl. Math. 1958. V. 11. P. 153—174.

300. *Schechter M.* Integral inequalities for partial differential operators and functions satisfying general boundary conditions // Comm. Pure Appl. Math. 1959. V. 12. P. 37—66.
301. *Schechter M.* General boundary value problems for elliptic partial differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1959. V. 12. P. 457—486.
302. *Schechter M.* Remarks on elliptic boundary value problems // Comm. Pure Appl. Math. 1959. V. 12, No. 4. P. 561—578.
303. *Schechter M.* A generalization of the problem of transmission // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1960. V. 14. P. 207—236.
304. *Schechter M.* Mixed boundary problems for general elliptic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1960. V. 13, No. 2. P. 183—201.
305. *Schechter M.* Various types of boundary conditions for elliptic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1960. V. 13, No. 3. P. 407—425.
306. *Seeley R.* Extensions of C^∞ functions defined in a half space // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15. P. 625—626.
307. *Seeley R.* Singular integrals and boundary value problems // Amer. J. Math. 1966. V. 88. P. 781—809.
308. *Seeley R. T.* Norms and domains of the complex powers A_B^z. // Amer. J. Math. 1971. V. XCIII, No. 2. P. 299—309.
309. *Seeley R. T.* Interpolation in L^p with boundary conditions // Studia Math. 1972. V. 44. P. 47—60.
310. *Shen Z.* Resolvent estimates in L_p for elliptic systems in Lipschitz domains // J. Funct. Anal. 1995. V. 133, No. 1. P. 224—251.
311. *Shen Z.* Necessary ans sufficient conditions for the solvability of the L_p Dirichlet problem on Lipschitz domains // Math. Ann. 2006. V. 336. P. 697—725.
312. *Shen Z.* The Neumann problem in L_p on Lipschitz and convex domains // J. Funct. Anal. 2008. V. 255, No. 7. P. 1817—1830.
313. *Shen Z.* The L_p regularity problem on Lipschitz domains // Trans. Amer. Math. Soc. 2011. V. 363, No. 3. P. 1241—1244.
314. *Smith K. T.* Inequalities for formally positive integro-differential forms // Bull. Amer. Math. Soc. 1961. V. 67. P. 368—370.
315. *Stepanoff W.* Sür les conditions d'existence de la differentielle totale // Матем. сборн. 1925. V. 32. P. 511—526.
316. *Stephan E.* A boundary integral equation method for three-dimensional crack problems in elasticity // Math. Methods in Appl. Sciences. 1986. V. 8. P. 609—623.
317. *Stephan E.* Boundary integral equations for screen problems in $\mathbb{R}^3$ // Integral Equations Operator Theory. 1987. V. 10. P. 236—257.
318. *Stephan E.* Boundary integral equations for mixed boundary value problems in $\mathbb{R}^3$ // Math. Nachr. 1987. V. 134. P. 21—53.

319. *Strichartz R. T.* Multipliers on fractional Sobolev spaces // Journ. Math. Mech. 1967. V. 16, No. 9. P. 1031—1060.
320. *Suslina T. A.* Spectral asymptotics of variational problems with elliptic constraints in domains with piecewise smooth boundary // Russian J. Math. Phys. 1999. V. 6, No. 2. P. 214—234.
321. *Taibleson M. H.* On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space. I. Principal properties // J. Math. Mech. 1964. V. 13. P. 407—479.
322. *ter Elst A.F.M.*, *Robinson D.W.* On Kato's square root problem // Hokkaido Math. J. 1997. V. 26. P. 365—376.
323. *Triebel H.* Spaces of distributions of Besov type on Euclidean n-space. Duality, interpolation // Ark. Mat. 1973. V. 11. P. 13—64.
324. *Triebel H.* Function spaces in Lipschitz domains and on Lipschitz manifolds. Characteristic functions as pointwise multipliers // Rev. Mat. Complut. 2002. V. 15, No. 2. P. 475—524.
325. *Uhlmann G.* Inverse boundary problems and applications // Astérisque. 1992. V. 207. P. 153—207.
326. *Verchota G.* Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace's equation // J. Funct. Anal. 1984. V. 59. P. 572—611.
327. *Verchota G.* The Dirichlet problem for polyharmonic equation in Lipschitz domains // Indiana Univ. Math. J. 1990. V. 39. P. 671—702.
328. *Verchota G.* The biharmonic Neumann problem in Lipschitz domains // Acta Math. 2005. V. 194. P. 217—279.
329. *Verchota G.*, *Vogel A.* Nonsymmetric systems on nonsmooth planar domains // Trans. Amer. Math. Soc. 1997. V. 349, No. 11. P. 4501—4535.
330. *Whitney H.* Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1934. V. 36. P. 63—89.
331. *Whitney H.* Differentiable functions defined on closed sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1934. V. 36. P. 369—487.
332. *Wolff T. W.* A note on interpolation spaces / Lecture Notes in Math. V. 908. Berlin etc.: Springer, 1982. P. 199—204.
333. *Zafran M.* Spectral theory and interpolation of operators // J. Functional Anal. 1980. V. 36. P. 185—204.
334. *Zanger D. Z.* The inhomogeneous Neumann problem in Lipschitz domains // Comm. Partial Differential Equations. 2000. V. 25, No. 9—10. P. 1771—1808.
335. *Yagi A.* Coincidence entre des espaces d'interpolation et des domaines de puissances fractionaires d'opérateurs // C. R. Acad. Sci. Paris, 1984. V. 299. Sér. I. No. 6. P. 173—176.

Михаил Семенович Агранович

Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи
в областях с гладкой и липшицевой границей

Подписано к печати 18.02.2013 г. Формат $60 \times 90/16$. Печать офсетная.
Объем 24 печ. л. Тираж 1000 экз. Заказ №   .

Отпечатано с электронных носителей издательства в ООО «Тверской
полиграфический комбинат». 170024, г. Тверь, пр-т Ленина, 5
Тел.: (4822)44-42-15, (495)748-04-67. Тел./факс: (4822)55-42-15.